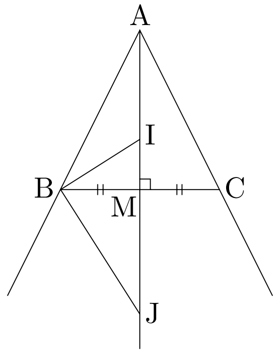
図チャレ 第21回 (2003年6月)

$AB = AC$ である二等辺三角形 ABC の内心を I，辺 BC に接する傍接円の中心を J とする。IJ を直径とする円は，直線 AB(および直線 AC)に接することを示せ。

解答

BC の中点を M とおくと，$AB = AC$ より直線 AM は $\angle BAC$ の二等分線となり，内心 I と傍心 J はともに直線 AM 上にある。



BI は $\angle ABM$ の二等分線であるから

$$\frac{AI}{IM} = \frac{AB}{BM}$$

BJ は $\angle ABM$ の外角の二等分線であるから

$$\frac{AJ}{JM} = \frac{AB}{BM}$$

2 式より

$$\frac{AI \cdot AJ}{IM \cdot JM} = \frac{AB^2}{BM^2}$$

$\angle IBJ = \angle ICJ = 90^\circ$ より，4 点 B, C, I, J を通る円が存在し，方べきの定理より

$$IM \cdot JM = BM \cdot CM = BM^2$$

であるから，

$$AI \cdot AJ = AB^2 \qquad \therefore\ AB : AI = AJ : AB$$

よって，$\triangle ABI \backsim \triangle AJB$ であり，特に

$$\angle ABI = \angle AJB$$

であるから，2 点 I, J を通り，B において直線 AB に接する円が存在する。

$$\angle IBJ = 90^\circ$$

より，その円は IJ を直径とする。 (おわり)