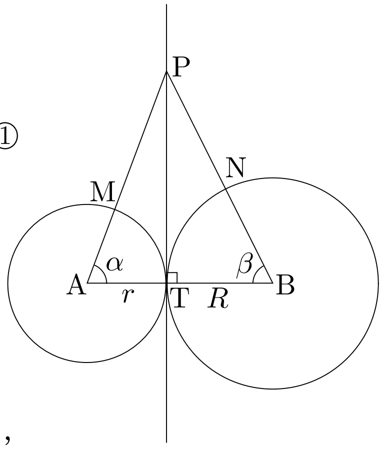
図チャレ 第22回 (2003年7月)

点Aを中心とする半径rの円C_1と，点Bを中心とする半径Rの円C_2が，点Tにおいて外接している。Tにおける2円の共通接線上に点Pをとり，線分APと円C_1の交点をM，線分BPと円C_2の交点をNとする。

$r < R$ならば，劣弧MTより劣弧NTの方が長いことを示せ。

解答



$\angle \mathrm{MAT} = \alpha$，$\angle \mathrm{NBT} = \beta$ とおくと

$$\mathrm{PT} = r\tan\alpha = R\tan\beta$$

$$\therefore\ \ r\alpha\frac{\tan\alpha}{\alpha} = R\beta\frac{\tan\beta}{\beta} \qquad \cdots\cdots ①$$

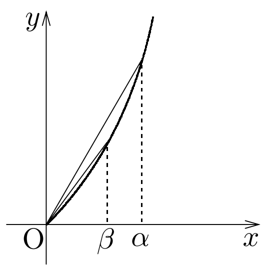
$r < R$ より

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{PT}}{r} > \frac{\mathrm{PT}}{R} = \tan\beta$$

$\tan x$ は $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ で単調増加であるから，

$$\alpha > \beta$$

$y = \tan x$ の $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のグラフは下に凸であるから，



$$\frac{\tan\alpha}{\alpha} > \frac{\tan\beta}{\beta} \qquad \cdots\cdots ②$$

②，①より

$$r\alpha\frac{\tan\beta}{\beta} < r\alpha\frac{\tan\alpha}{\alpha} = R\beta\frac{\tan\beta}{\beta}$$

$\dfrac{\tan\beta}{\beta} > 0$ より

$$r\alpha < R\beta$$

よって，劣弧MTより劣弧NTの方が長い。

(おわり)

(注) ②については，(狭義)単調増加を導くために

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\tan x}{x}\right) = \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot x - \tan x}{x^2} = \frac{x - \tan x\cos^2 x}{x^2\cos^2 x}$$
$$= \frac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$$
$$= \frac{2x - \sin 2x}{2x^2\cos^2 x} > 0$$

としてもよい。