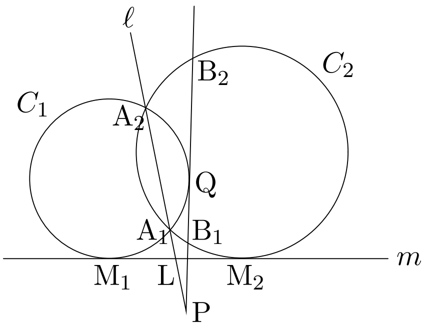
図チャレ 第24回(2003年9月)

2円 C_1，C_2 は異なる2点で交わり，その2交点を通る直線を ℓ，2円の共通接線の1つを m とする。

(1) C_1, C_2 と m との接点をそれぞれ M_1，M_2 とするとき，ℓ と m の交点 L は $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ の中点であることを示せ。

(2) 円 C_1 の外部にある ℓ 上の点 P から，円 C_2 と2点で交わるように円 C_1 に接線をひき，その接点を Q とする。直線 PQ が円 C_2 から切り取られる線分の中点を M とするとき，$\mathrm{PQ} < \mathrm{PM}$ であることを示せ。

解答



(1) C_1 と C_2 の2交点を A_1，A_2 とすると，

$$\mathrm{LM_1}^2 = \mathrm{LA_1}\cdot\mathrm{LA_2} \quad (\text{L に関する } C_1 \text{ の方べき})$$
$$\mathrm{LM_2}^2 = \mathrm{LA_1}\cdot\mathrm{LA_2} \quad (\text{L に関する } C_2 \text{ の方べき})$$

であるから，

$$\mathrm{LM_1} = \mathrm{LM_2}$$

よって，ℓ と m の交点 L は $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ の中点である。 (おわり)

(2) 直線 PQ と円 C_2 との交点を B_1，B_2 とすると，方べきの定理より

$$\begin{aligned}
\mathrm{PQ}^2 &= \mathrm{PA_1}\cdot\mathrm{PA_2} \quad (\text{P に関する } C_1 \text{ の方べき}) \\
&= \mathrm{PB_1}\cdot\mathrm{PB_2} \quad (\text{P に関する } C_2 \text{ の方べき}) \\
&= (\mathrm{PM} - b)(\mathrm{PM} + b) \quad \left(b = \frac{1}{2}\mathrm{B_1B_2}\right) \\
&= \mathrm{PM}^2 - b^2 \\
&< \mathrm{PM}^2
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \mathrm{PQ} < \mathrm{PM}$$

(おわり)