図チャレ 第26回 (2003年11月)

　線分 AB を直径とする円の点 A における接線上に A と異なる点 P をとり，点 P からこの円に直線 AP と異なる接線を引く。その接点を Q とし，Q から線分 AB におろした垂線の足を H とする。

(1)　AB の中点を O とするとき，$\triangle \mathrm{OAP} \backsim \triangle \mathrm{BHQ}$ が成り立つことを示せ。

(2)　線分 QH と線分 BP の交点を R とするとき，QR : RH を求めよ。

解答

(1)　$\mathrm{OA} = \mathrm{OQ}$，$\angle \mathrm{OAP} = \angle \mathrm{OQP} = 90^\circ$ であるから，

　ピタゴラスの定理(三平方の定理)より

$$\mathrm{AP} = \mathrm{PQ} \ \left(= \sqrt{\mathrm{OP}^2 - \mathrm{OA}^2}\right)$$

$$\therefore \ \triangle \mathrm{OAP} \equiv \triangle \mathrm{OQP}$$

　よって，特に

$$\angle \mathrm{AOP} = \angle \mathrm{QOP}$$

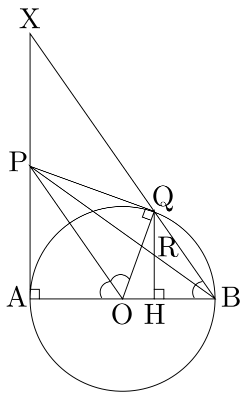
　であるから，円周角の性質より

$$\angle \mathrm{ABQ} = \frac{1}{2} \angle \mathrm{AOQ} = \angle \mathrm{AOP}$$

　$\angle \mathrm{OAP} = \angle \mathrm{BHQ} = 90^\circ$ とあわせて

$$\triangle \mathrm{OAP} \backsim \triangle \mathrm{BHQ}$$

(おわり)



(2)　AP の延長と直線 BQ の交点を X とする。

　(1)より $\angle \mathrm{AOP} = \angle \mathrm{ABX}$ であり，

$$\mathrm{OP} /\!/ \mathrm{BX}$$

　であるから，

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PX} = \mathrm{AO} : \mathrm{OB} = 1 : 1$$

　$\mathrm{PA} /\!/ \mathrm{QH}$ より

$$\triangle \mathrm{BQH} \backsim \triangle \mathrm{BXA}，\triangle \mathrm{BRH} \backsim \triangle \mathrm{BPA}$$

　であるから，

$$\mathrm{QR} : \mathrm{RH} = \mathrm{XP} : \mathrm{PA} = 1 : 1 \quad (答)$$