図チャレ 第27回 (2003年12月)

$\triangle$ABC の 3 頂点が内部または周上にある半径 R の円 E を考える。

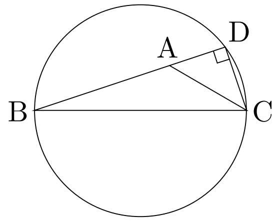
(1) $\triangle$ABC が鈍角三角形

(2) $\triangle$ABC が鋭角三角形

のそれぞれの場合において，R が最小となる円 E はどのような円か。

解答

(1) $\angle$BAC が鈍角とすると BC が最大辺であり，BC を直径とする円を E' とすると，E' は 2 点 B, C を内部または周上にもつ最小の円である。



直線 AB と円 E' の交点のうち B でない方を D とすると，E' は BC を直径とする円であるから，

$$\angle \mathrm{BDC} = 90^\circ$$

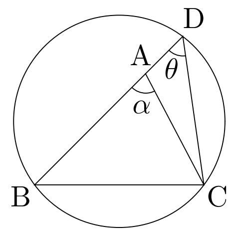
$\angle$BAC は鈍角であるから，点 A は線分 BD 上の点となり，$\triangle$ABC は円 E' の内部または周上にある。

よって，R が最小となる円 E は

$\triangle$ABC の最大辺を直径とする円　(答)

(2) 必要ならば $\triangle$ABC を平行移動させて，

2 点 B, C は円 E の周上にある



としてよい。BA の延長と円 E との交点を D とし，$\angle \mathrm{BAC} = \alpha$，$\angle \mathrm{BDC} = \theta$ とおくと

$$0^\circ < \theta \leqq \alpha < 90^\circ$$

$$\therefore\ \ 0 < \sin\theta \leqq \sin\alpha < 1$$

正弦定理より

$$R = \frac{\mathrm{BC}}{2\sin\theta} \geqq \frac{\mathrm{BC}}{2\sin\alpha}$$

であるから，R が最小となるのは $\theta = \alpha$ のときである。

よって，R が最小となる円 E は

$\triangle$ABC の外接円　(答)