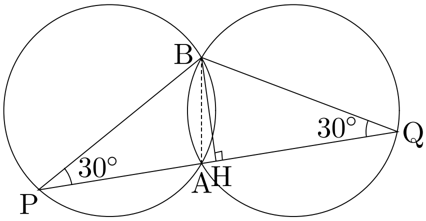
図チャレ 第28回 (2004年1月)

半径が1である2円 C_1, C_2 が異なる2点A, Bで交わり，弦ABの長さは1である。Aを通る直線と2円 C_1, C_2 がそれぞれAと異なる点P, Qで交わるとき，線分PQの長さの最大値を求めよ。

解答

C_1, C_2 の中心をそれぞれ $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$ とすると，$\triangle \mathrm{O_1AB}$, $\triangle \mathrm{O_2AB}$ はともに正三角形であるから，劣弧ABの円周角を考えて

$$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AQB} = 30^\circ$$



BからPQにおろした垂線の足をHとすると，HはPQの中点であり，

$$\mathrm{PH} = \mathrm{QH} = \frac{\mathrm{BH}}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}\,\mathrm{BH}$$

$$\therefore\ \ \mathrm{PQ} = 2\sqrt{3}\,\mathrm{BH}$$

$\mathrm{BH} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{AH}^2}$ (H = Aのときを含む)であるから，

$\mathrm{PQ} = 2\sqrt{3}\,\mathrm{BH}$ が最大となるのは H = A のとき

であり，

PQの長さの最大値は $2\sqrt{3}$ (答)

(注) 異なる円であっても，半径が等しければ，同じ長さの円弧に対する円周角の大きさは等しい。