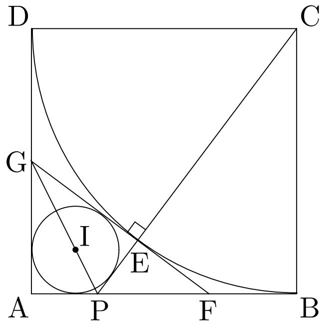
図チャレ 第29回 (2004年2月)

一辺の長さ1の正方形ABCDの辺AB上に点Pをとり，点Cを中心とする半径1の円Cと線分CPとの交点をEとする。点Eにおける円Cの接線と辺AB, ADの交点をそれぞれF, Gとし，△AFGの内心をI，直線GIと辺ABの交点をQとする。

Pと Qが一致するとき，APの長さを求めよ。

コメント：2004年のセンター試験の問題を解いた人ならピンときますね。

解答



線分FGは点Eにおける円Cの接線であるから，

$$\mathrm{FG} \perp \mathrm{CP}$$
$$\therefore\ \angle\mathrm{GAP} = \angle\mathrm{GEP} = 90^\circ$$

Iは△AFGの内心であるから

$$\angle\mathrm{AGI} = \angle\mathrm{FGI}$$
$$\therefore\ \angle\mathrm{AGP} = \angle\mathrm{EGP}$$

よって，GPを共通辺とする△AGPと△EGPについて

$$\triangle\mathrm{AGP} \equiv \triangle\mathrm{EGP}$$

AP = EPが成り立つことを考えて

$$\mathrm{AP} = \mathrm{EP} = x$$

とおく。CE = CB = 1であるから，直角三角形BCPにピタゴラスの定理(三平方の定理)をあてはめると，

$$(1-x)^2 + 1^2 = (1+x)^2$$
$$(1+x)^2 - (1-x)^2 = 4x = 1$$
$$\therefore\ x = \mathrm{AP} = \frac{1}{4} \quad (\text{答})$$