図チャレ 第30回 (2004年3月)

1つの円に内接する2つの三角形が，周の長さと面積が等しいならば合同であることを示せ。

解答

2つの三角形を $\triangle\mathrm{ABC}$，$\triangle\mathrm{PQR}$ とし，

$$\mathrm{BC}=a,\ \mathrm{CA}=b,\ \mathrm{AB}=c,\ \angle\mathrm{BAC}=\alpha$$
$$\mathrm{QR}=p,\ \mathrm{RP}=q,\ \mathrm{PQ}=r,\ \angle\mathrm{QPR}=\theta$$

とおく。仮定より

$$a+b+c=p+q+r \qquad \cdots\cdots ①$$
$$bc\sin\alpha=qr\sin\theta \qquad \cdots\cdots ②$$

正弦定理より

$$(\text{外接円の直径})=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{p}{\sin\theta}$$

であるから，②より

$$abc\sin\alpha=aqr\sin\theta=pqr\sin\alpha$$
$$\therefore\ \ abc=pqr \qquad \cdots\cdots ③$$

余弦定理より

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \ \cos\theta=\frac{q^2+r^2-p^2}{2qr}$$

であるから，②に代入して

$$4b^2c^2\sin^2\alpha=4q^2r^2\sin^2\theta$$
$$4b^2c^2(1-\cos^2\alpha)=4q^2r^2(1-\cos^2\theta)$$
$$4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=4q^2r^2-(q^2+r^2-p^2)^2$$
$$(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)$$
$$=(2qr+q^2+r^2-p^2)(2qr-q^2-r^2+p^2)$$
$$\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}=\{(q+r)^2-p^2\}\{p^2-(q-r)^2\}$$
$$\therefore\ \ (a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$$
$$=(p+q+r)(q+r-p)(p+q-r)(p-q+r)$$

①を考えて $a+b+c=p+q+r=t$ とおくと

$$t(t-2a)(t-2b)(t-2c)=t(t-2p)(t-2q)(t-2r)$$

①，③および $t>0$ より

$$4(ab+bc+ca)t=4(pq+qr+rp)t$$
$$\therefore\ \ ab+bc+ca=pq+qr+rp \qquad \cdots\cdots ④$$

①，③，④より，x の恒等式

$$(x-a)(x-b)(x-c)=(x-p)(x-q)(x-r)$$

が成り立つから

$$\{a,\ b,\ c\}=\{p,\ q,\ r\}$$

となり，

$$\triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{PQR}$$

である。

(おわり)

(注)　三角形でなければ，辺の長さの組が等しいだけでは合同とは限らない。