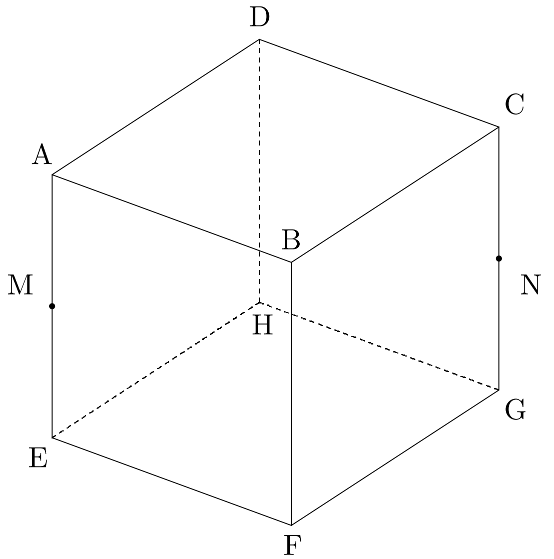
図チャレ 第31回(2004年4月)

一辺の長さが2の立方体ABCD-EFGHがある．辺AEの中点をM，辺CGの中点をNとする．次の問いに答えよ．

問1　点Pが辺BF上をBからFまで動くとき，3点M，N，Pを通る平面でこの立方体を切った切り口の図形の面積の最大値および最小値を求めよ．

問2　点Qが辺AB上をAからBまで動くとき，3点M，N，Qを通る平面でこの立方体を切った切り口の図形の面積の最大値および最小値を求めよ．



出典：2004年 大阪市立大学 理学部

解答

【問 1】 線分 MN の中点を O とする。直線 OP と辺 DH の交点を P$'$ とすると，切り口は四角形 MPNP$'$ となる。M と N は定点であり，切り口はひし形であるから，断面積 $\dfrac{1}{2}\cdot \mathrm{MN}\cdot \mathrm{PP}'$ は

P $=$ B または P $=$ F のとき最大
P が BF の中点のとき最小

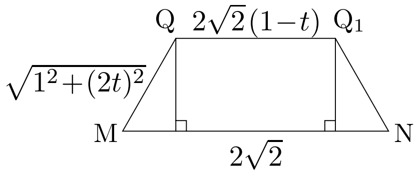
となり，

$$\left.\begin{aligned}&\text{最大値}\quad \frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{3}=2\sqrt{6}\\&\text{最小値}\quad \frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=4\end{aligned}\right\}\ (\text{答})$$

(注) 最小値は，正方形 ABCD の面積と同じで $2\times 2=4$ としてもよい。

【問 2】 平面 MNQ は辺 BC 上の点 $\mathrm{Q_1}$，辺 GH 上の点 $\mathrm{Q_2}$，辺 EH 上の点 $\mathrm{Q_3}$ を通る。

対称性により，空間において台形 $\mathrm{MQQ_1N}$ を，直線 MN を軸として 180° 回転させると台形 $\mathrm{MQ_3Q_2N}$ に重なる。特に，2 つの台形は合同で面積が等しいから，立方体の切り口の面積は台形 $\mathrm{MQQ_1N}$ の面積の 2 倍である。



$$\mathrm{AQ}:\mathrm{QB}=t:1-t$$

とすると，切り口の面積 $S(t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ は

$$\begin{aligned}S(t)&=\frac{1}{2}\left\{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,(1-t)\right\}\sqrt{1^2+(2t)^2-(\sqrt{2}\,t)^2}\times 2\\&=2\sqrt{2}\,(2-t)\sqrt{1+2t^2}\\&=2\sqrt{2}\sqrt{(2-t)^2(1+2t^2)}\end{aligned}$$

ここで，

$$f(t)=(2-t)^2(1+2t^2)=(t-2)^2(2t^2+1)\quad (0\leqq t\leqq 1)$$

とおくと，

$$\begin{aligned}f'(t)&=2(t-2)(2t^2+1)+(t-2)^2\cdot 4t\\&=2(t-2)\{2t^2+1+2t(t-2)\}\\&=2(t-2)(2t-1)^2\leqq 0\end{aligned}$$

より $f(t)$ は単調減少であり，$S(t)$ も単調減少である。

よって，

最大値 $S(0)=4\sqrt{2}$，最小値 $S(1)=2\sqrt{6}$ (答)