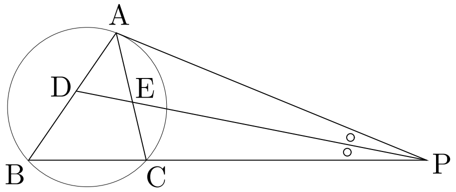
図チャレ 第32回(2004年5月)

　三角形ABCの辺BCの延長上に点Pをとり，∠APBの二等分線と辺AB，辺ACとの交点をそれぞれD，Eとする。

$$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=\mathrm{CE}:\mathrm{EA}$$

であるとき，三角形ABCの外接円は直線APと接することを示せ。

解答



メネラウスの定理と AD : DB = CE : EA より

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{BP}}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=\frac{\mathrm{AD}^2}{\mathrm{DB}^2} \qquad \cdots\cdots ①$$

PDは ∠APBの二等分線であるから，

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{BP}} \qquad \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{BP}}=\frac{\mathrm{AP}^2}{\mathrm{BP}^2} \qquad \therefore\ \mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}$$

方べきの定理より，3点A，B，Cを通る円は直線APと点Aで接する。

(おわり)

(注) 点Pが(直線BC上)点B側と点C側のどちらの延長上にある場合も，上の式は成り立つ。