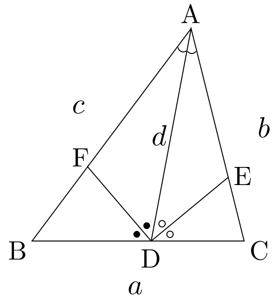
図チャレ 第33回(2004年6月)

三角形ABCにおいて，∠BACの二等分線と辺BCの交点をD，∠ADCの二等分線と辺CAの交点をE，∠ADBの二等分線と辺ABの交点をFとする。

3線分AD，BE，CFは1点で交わることを示せ。

解答



BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$，AD $= d$ とおく。

ADは∠BACの二等分線であるから，

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=c:b \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\therefore\ \mathrm{BD}=\frac{c}{b+c}a,\quad \mathrm{CD}=\frac{b}{b+c}a \qquad \cdots\cdots ②$$

DEは∠ADCの二等分線であるから，②を用いて

$$\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AD}}=\frac{ab}{(b+c)d} \qquad \cdots\cdots ③$$

DFは∠ADBの二等分線であるから，②を用いて

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}}=\frac{(b+c)d}{ca} \qquad \cdots\cdots ④$$

①，③，④より

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=\frac{(b+c)d}{ca}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{ab}{(b+c)d}=1$$

よって，チェバの定理の逆より

3線分AD，BE，CFは1点で交わる。

(おわり)