図チャレ 第34回(2004年7月)

三角形ABCの内部に，次の条件を満たす点Pが存在することを証明せよ。

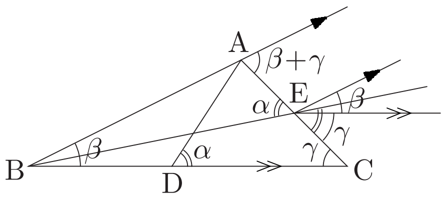
(条件) 直線APと辺BCの交点をDとし，直線BPと辺CAの交点をEとするとき，4点D，C，E，Pは同一円周上にある。

解答

$\angle ABC = \beta$，$\angle ACB = \gamma$ とおき，角度 α を

$$\max\{\beta,\ \gamma\} < \alpha < \beta + \gamma$$

を満たすようにとる。($\beta > 0$，$\gamma > 0$ であるから，これは可能である。)



$\gamma < \alpha < \beta + \gamma$ より，辺CA上に点Eを

$$\angle AEB = \alpha$$

となるようにとることができる。また，$\beta < \alpha$ であるから，辺BC上に点Dを

$$\angle ADC = \alpha$$

となるようにとることができる。

このとき，線分ADと線分BEの交点をPとすると，点Pは△ABCの内部にあり，

$$\angle CEP = \pi - \alpha,\ \ \angle CDP = \alpha$$

となるから，4点D，C，E，Pは同一円周上にある。

(おわり)