図チャレ 第35回(2004年8月)

(1) 平面上にある任意の4点A，B，C，Dに対して，不等式

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC} \geqq \mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$$

が成り立つことを複素数平面を用いて証明せよ。また，等号が成り立つとき，4点A，B，C，Dの位置関係を答えよ。

(2) 正三角形ABCと同一平面上にある点Pに対して，不等式

$$\mathrm{PA}+\mathrm{PB} \geqq \mathrm{PC}$$

が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つとき，点Pの位置を求めよ。

注：(1)の不等式が成り立つことをオイラーの定理といい，等号成立条件をトレミーの定理という。もちろん，歴史的にはトレミーの定理の方が先である。

解答

(1) 複素数平面上において，4点A，B，C，Dを表す複素数をそれぞれα，β，γ，δとする。一般に，恒等式

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma) &= -\alpha\delta-\beta\gamma+\alpha\beta+\gamma\delta \\ &= (\alpha-\gamma)(\beta-\delta)\end{aligned}$$

が成り立つから，三角不等式により

$$|(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)|+|(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)| \geqq |(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)|$$

$$\therefore\ |\alpha-\beta||\gamma-\delta|+|\alpha-\delta||\beta-\gamma| \geqq |\alpha-\gamma||\beta-\delta|$$

これは，$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC} \geqq \mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$が成り立つことを表す。 (不等式の証明終)

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD} &\iff \arg\frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}=0^\circ \\ &\iff \arg(-1)\cdot\frac{\beta-\alpha}{\delta-\alpha}\cdot\frac{\delta-\gamma}{\beta-\gamma}=0^\circ \\ &\iff \arg\frac{\beta-\alpha}{\delta-\alpha}+\arg\frac{\delta-\gamma}{\beta-\gamma}=180^\circ \\ &\iff \text{「A，B，C，Dは同一円周上」}\quad\text{(答)}\end{aligned}$$

(注) 偏角argは360°ごとに同一視して，0°以上360°未満の角度で表記している。

(2) (1)より

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{BC}+\mathrm{PB}\cdot\mathrm{CA} \geqq \mathrm{PC}\cdot\mathrm{AB}$$

が成り立ち，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}>0$より

$$\mathrm{PA}+\mathrm{PB} \geqq \mathrm{PC}$$

が成り立つ。 (不等式の証明終)

等号成立条件についても，(1)より

$$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}=\mathrm{PC} \iff \text{「Pは}\triangle\mathrm{ABC}\text{の外接円上」}\quad\text{(答)}$$