図チャレ 第36回(2004年9月)

△OABにおいて，辺OA上に点Cを，辺OB上に点Dをとり，線分ADと線分BCの交点をPとする。ただし，C，Dは辺の端点ではないものとする。さらに，点Qを四角形OCQDが平行四辺形となるようにとり，線分ADと線分CQの交点をE，線分BCと線分DQの交点をFとする。

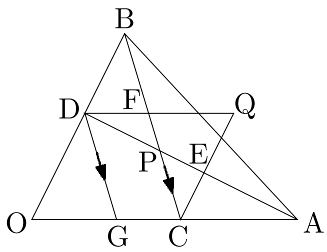
(1) 線分EFと線分ABは平行であることを示せ。

(2) 点Rを四角形OARBが平行四辺形となるようにとるとき，3点P，Q，Rは同一直線上にあることを示せ。

コメント：ベクトルを用いれば機械的に証明できますが，できるだけ初等幾何による証明を考えてみて下さい。とはいえ，比の計算があるので数式処理は避けられませんが。

解答

(1) 直接には，PE : EA = PF : FB であることを示せばよい。



C，Dの内分の比を

$$\mathrm{OC} : \mathrm{CA} = a : 1-a \quad (0 < a < 1)$$
$$\mathrm{OD} : \mathrm{DB} = b : 1-b \quad (0 < b < 1)$$

とおき，Dを通りBCに平行な直線と辺OAの交点をGとする。DG⫽BCより

$$\mathrm{OG} : \mathrm{GC} = \mathrm{OD} : \mathrm{DB} = b : 1-b$$
$$\therefore\ \mathrm{OG} : \mathrm{GC} : \mathrm{CA} = ab : a(1-b) : 1-a$$

DG⫽BCより

$$\mathrm{DP} : \mathrm{PA} = \mathrm{GC} : \mathrm{CA} = a(1-b) : 1-a \qquad \cdots\cdots ①$$

OD⫽CQより

$$\mathrm{DE} : \mathrm{EA} = \mathrm{OC} : \mathrm{CA} = a : 1-a \qquad \cdots\cdots ②$$

①かつ②より

$$\mathrm{DP} : \mathrm{PE} : \mathrm{EA} = \frac{a(1-b)}{1-ab} : \frac{1-a}{1-ab} - (1-a) : 1-a$$
$$= a(1-b) : ab(1-a) : (1-ab)(1-a)$$

$$\therefore\ \mathrm{PE} : \mathrm{EA} = ab : 1-ab$$

aとbの役割を入れかえて同様に考えると，

$$\mathrm{PF} : \mathrm{FB} = ab : 1-ab$$

となるから，

$$\mathrm{PE} : \mathrm{EA} = \mathrm{PF} : \mathrm{FB} \qquad \therefore\ \mathrm{EF} /\!\!/ \mathrm{AB}$$

(証明おわり)

(2)　直線 CE ($/\!/$ OB) と線分 PR の交点を X とし，
X を通り辺 OA に平行な直線と線分 BC の交点を Y とする。CX $/\!/$ AR より

$$PX : XR = PE : EA$$

XY $/\!/$ BR ($/\!/$ OA) より

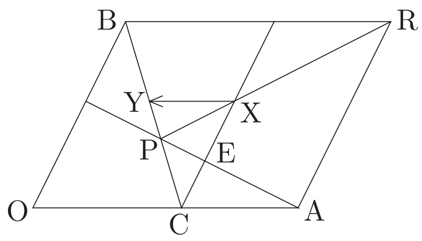
$$PY : YB = PX : XR = PE : EA$$

(1) より Y = F であり，FX $/\!/$ OA，CX $/\!/$ OB より

$$X = Q$$

となる。X (= Q) は線分 PR 上の点と定めたから，

P，Q，R は同一直線上にある。



(証明おわり)

(注)　ベクトルによる証明は，機械的に(簡単に)できるので省略する。