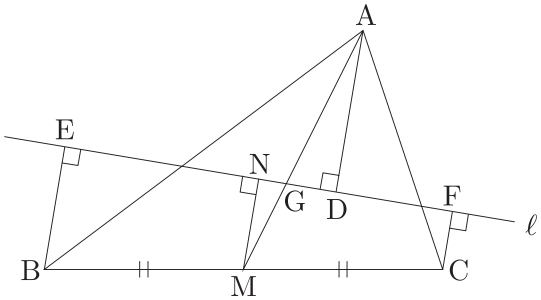
図チャレ 第37回(2004年10月)

　△ABC の辺 AB，AC 上にそれぞれ端点と異なる点 P，Q をとり，2 点 P，Q を通る直線を ℓ とする。A，B，C から ℓ におろした垂線の足をそれぞれ D，E，F とする。AD $=$ BE $+$ CF ならば，ℓ は △ABC の重心を通ることを示せ。

解答



　BC の中点を M とし，M から ℓ におろした垂線の足を N とすると，

$$\mathrm{BE} /\!/ \mathrm{MN} /\!/ \mathrm{CF},\quad \mathrm{BM} = \mathrm{CM}$$

より

$$\mathrm{BE} + \mathrm{CF} = 2\,\mathrm{MN}^{\text{(注}} \qquad \therefore\ \mathrm{AD} = 2\,\mathrm{MN}$$

中線 AM と ℓ の交点を G とすると

$$\triangle\mathrm{ADG} \backsim \triangle\mathrm{MNG},\quad \mathrm{AD} : \mathrm{MN} = 2 : 1$$

であるから，

$$\mathrm{AG} : \mathrm{GM} = 2 : 1$$

　よって，G は △ABC の重心であり，直線 ℓ は重心 G を通る。

(証明おわり)

(注) BE $+$ CF $= 2$ MN について詳しく述べると，次のようになる。

B，C から直線 MN におろした垂線の足をそれぞれ P，Q とおくと

$$\triangle\mathrm{BMP} \equiv \triangle\mathrm{CMQ}$$

となる。そこで，

$$\mathrm{MP} = \mathrm{MQ} = d$$

とおくと，BE，CF の一方は MN $+ d$，他方は MN $- d$ となるから，

$$\mathrm{BE} + \mathrm{CF} = (\mathrm{MN} + d) + (\mathrm{MN} - d) = 2\,\mathrm{MN}$$