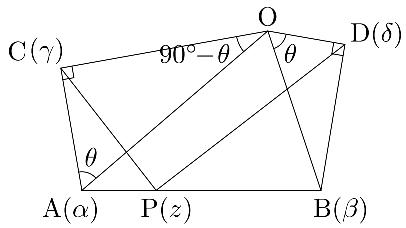
図チャレ 第38回(2004年11月)

△OABの辺OA，OBを斜辺とする直角三角形OAC，OBDがそれぞれ△OABの外側にあり，△OAC∽△BODであるとする。∠OAC = ∠BOD = θ とするとき，辺ABを $\cos^2\theta : \sin^2\theta$ に内分する点をPとすれば，∠CPDは直角であることを示せ。

解答



Oを原点とする複素数平面上で考えて，各点を表す複素数をそれぞれ A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ)，P(z) とする。必要ならば，裏返した場合を考えることにより，O，A，Bはこの順で反時計まわりであるとして一般性を失わない。

直角三角形OACに注目すると，

$$\begin{aligned}\gamma &= \alpha \times \cos(90^\circ - \theta)\{\cos(\theta - 90^\circ) + i\sin(\theta - 90^\circ)\}\\ &= \alpha\sin\theta(\sin\theta - i\cos\theta)\end{aligned}$$

直角三角形OBDに注目すると，

$$\delta = \beta \times \cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta)$$

PはABを $\cos^2\theta : \sin^2\theta$ に内分するから

$$z = \alpha\sin^2\theta + \beta\cos^2\theta$$

$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ に対応する複素数は

$$\begin{aligned}\gamma - z &= \alpha\sin\theta(\sin\theta - i\cos\theta) - (\alpha\sin^2\theta + \beta\cos^2\theta)\\ &= -\alpha i\sin\theta\cos\theta - \beta\cos^2\theta\\ &= -i\cos\theta(\alpha\sin\theta - i\beta\cos\theta)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ に対応する複素数は

$$\begin{aligned}\delta - z &= \beta\cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta) - (\alpha\sin^2\theta + \beta\cos^2\theta)\\ &= -\alpha\sin^2\theta + i\beta\sin\theta\cos\theta\\ &= -\sin\theta(\alpha\sin\theta - i\beta\cos\theta)\\ &= -i(\tan\theta)(\gamma - z)\end{aligned}$$

この式は，点Pを中心にして線分PCを -90° 回転させると線分PDに重なる(長さは $\tan\theta$ 倍になる)ことを表すから，

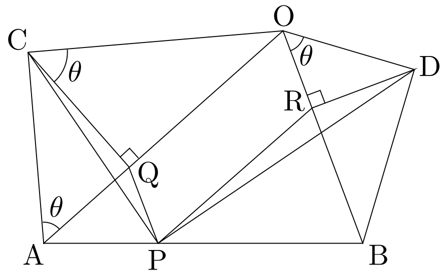
$$\angle\mathrm{CPD}\text{は直角}$$

である。

(証明おわり)

別解　初等幾何による証明を小島敏久先生に教えていただきました。

点 C から辺 OA に下ろした垂線の足を Q，点 D から辺 OB に下ろした垂線の足を R とする。



$$\begin{aligned} \mathrm{AQ}:\mathrm{QO} &= \mathrm{AC}\cos\theta : \mathrm{OC}\sin\theta \\ &= \mathrm{OA}\cos^2\theta : \mathrm{OA}\sin^2\theta = \cos^2\theta : \sin^2\theta \end{aligned}$$

同様に，

$$\mathrm{OR}:\mathrm{RB} = \cos^2\theta : \sin^2\theta$$

であるから，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PB} = \mathrm{AQ}:\mathrm{QO} = \mathrm{OR}:\mathrm{RB}$$

よって，PQ∥RO，PR∥QO であるから

$$\text{PQOR は平行四辺形} \qquad \cdots\cdots (*)$$

となる。

△CPQ と △PDR において，PR＝QO，PQ＝RO であるから

$$\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{CQ}} = \frac{\mathrm{QO}}{\mathrm{CQ}} = \tan\theta, \quad \frac{\mathrm{DR}}{\mathrm{PQ}} = \frac{\mathrm{DR}}{\mathrm{RO}} = \tan\theta$$

$$\therefore\ \mathrm{CQ}:\mathrm{PR} = \mathrm{PQ}:\mathrm{DR} \qquad \cdots\cdots ①$$

また，$(*)$より $\angle\mathrm{AQP} = \angle\mathrm{PRB}$ であるから

$$\angle\mathrm{CQP} = 90^\circ + \angle\mathrm{AQP} = 90^\circ + \angle\mathrm{PRB} = \angle\mathrm{PRD} \qquad \cdots\cdots ②$$

①，② より △CPQ ∽ △PDR であるから

$$\angle\mathrm{CPQ} = \angle\mathrm{PDR} \qquad \cdots\cdots ③$$

③および $(*)$より

$$\begin{aligned} \angle\mathrm{CPD} &= \angle\mathrm{CPQ} + \angle\mathrm{QPR} + \angle\mathrm{RPD} \\ &= \angle\mathrm{PDR} + \angle\mathrm{QPR} + \angle\mathrm{RPD} \\ &= (180^\circ - \angle\mathrm{PRD}) + \angle\mathrm{QPR} \\ &= 180^\circ - (90^\circ + \angle\mathrm{PRB}) + \angle\mathrm{QPR} \\ &= 90^\circ - \angle\mathrm{PRB} + \angle\mathrm{QPR} \\ &= 90^\circ \end{aligned}$$

(証明おわり)