

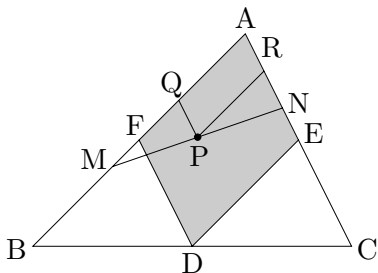
図チャレ 第39回(2004年12月)

三角形ABCの内部にある任意の点Pに対して、両端が三角形ABCの辺上にある線分で、中点がPとなるものが存在することを証明せよ。

解答

3辺BC, CA, ABの中点をそれぞれD, E, Fとする。点Pは3つの平行四辺形AFDE, BDEF, CEFDのいずれかに必ず含まれる。

点Pが平行四辺形AFDEの周および内部(辺AB, AC上は除く)にあるとき、辺AB上に点Q, 辺AC上に点Rをとり、四角形AQPRが平行四辺形になるようにする。



$$AQ \leq AF, AR \leq AE$$

であるから、辺AB上に点M, 辺AC上に点Nを

$$AM = 2AQ, AN = 2AR$$

となるようにとることができる。このとき、 $QP \parallel AN$ より

$$MP : PN = MQ : QA = 1 : 1$$

であり、点Pは線分MNの中点となる。

以上の考察より、条件はすべて比で決まるから、点Pが他の平行四辺形BDEF, CEFD内にある場合も同様に示される。(証明おわり)