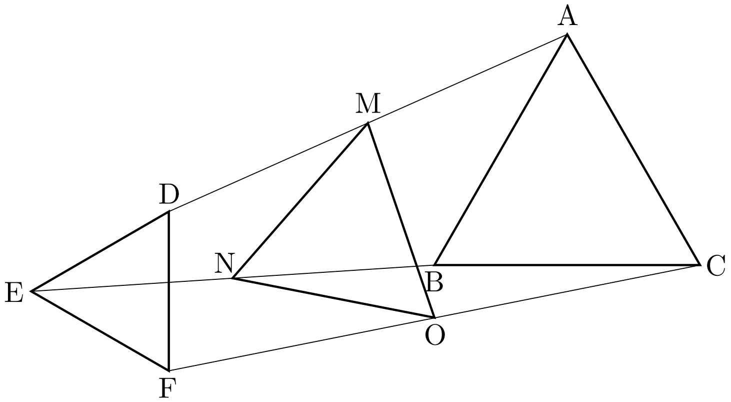
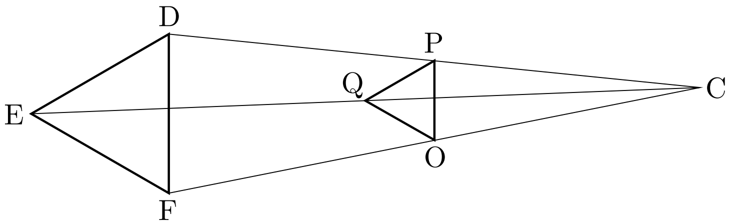
図チャレ 第40回 (2005年1月)

2つの正三角形 ABC, DEF に対して AD, BE, CF の中点をそれぞれ M, N, O とするとき，△OMN は正三角形であることを証明せよ。ただし，ABC, DEF はともに反時計まわりの順になっているものとする。

解答





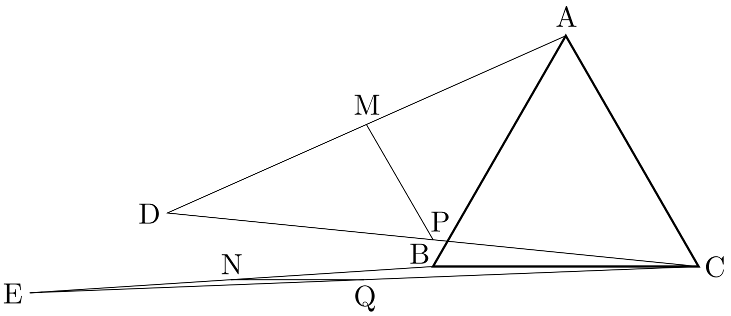
CD の中点を P, CE の中点を Q とすると，点 C と中心として

$$\triangle\mathrm{OPQ} \backsim \triangle\mathrm{FDE} \qquad \cdots\cdots ①$$

△FDE は正三角形であるから，

$$\mathrm{OP} \text{ を O のまわりに } 60^\circ \text{ 回転させると OQ} \qquad \cdots\cdots ②$$

となる。



△CAD および △BCE において中点連結定理より

$$\overrightarrow{\mathrm{PM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{QN}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CB}} \qquad \cdots\cdots ③$$

$\angle\mathrm{BCA} = 60^\circ$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PM}} \text{ を P のまわりに } 60^\circ \text{ 回転させると } \overrightarrow{\mathrm{QN}} \qquad \cdots\cdots ④$$

②, ④ より

$$\angle\mathrm{OPM} = \angle\mathrm{OQN}$$

①, ③ より $\mathrm{OP} = \mathrm{OQ}$，$\mathrm{PM} = \mathrm{QN}$ であるから，

$$\triangle\mathrm{OPM} \equiv \triangle\mathrm{OQN} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

よって，$\mathrm{OM} = \mathrm{ON}$ となり，②, ⑤ より $\angle\mathrm{MON} = 60^\circ$ であるから

$\triangle\mathrm{OMN}$ は正三角形

である。 (おわり)

（注） 上の解答では，回転させることにより $\angle\mathrm{OPM} = \angle\mathrm{OQN}$ とあっさり片付けたが，詳しく述べると次のようになる。

点 R を四角形 QPMR が平行四辺形になるように定めると，④より

$$\angle\mathrm{RQN} = 60^\circ$$

$\angle\mathrm{MPQ} = \theta$ とおくと，$\angle\mathrm{PQR} = 180^\circ - \theta$ であり，

$$\angle\mathrm{OQN} = 360^\circ - (60^\circ \times 2 + 180^\circ - \theta) = 60^\circ + \theta = \angle\mathrm{OPM}$$