

図チャレ 第 41 回 (2005 年 2 月)

点 O を中心とする半径 r の円 C の内部に, O と異なる点 M をとり, $OM = m$ とする。 ($0 < m < r$)

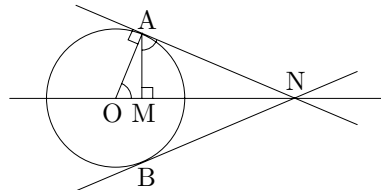
- (1) M を中点とする円 C の弦の両端を A, B とし, A における C の接線と B における C の接線の交点を N とする。 MN の長さを r, m で表せ。
- (2) M を通る任意の円 C の弦を EF とする。直線 OM に関して点 F と対称な点を G とし, 直線 EG と直線 OM の交点を H , 点 H から円 C に引いた接線の接点を P, Q とする。 PQ の中点は M と一致することを証明せよ。

解答

(1) $\triangle AMN \sim \triangle OMA$ より

$$\frac{MN}{\sqrt{r^2 - m^2}} = \frac{\sqrt{r^2 - m^2}}{m}$$

$$\therefore MN = \frac{r^2}{m} - m \quad (\text{答}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$



(2) $MH = MN$ を示せばよい。

点 H は FG の垂直二等分線上にあるから

$$\angle MHE = \angle MHF$$

$$\therefore EH : FH = EM : FM$$

$EM = a, FM = b$ とおくと

$$EH = ka, FH = GH = kb \quad (k \text{ は正の実数})$$

と表されて, 方べきの定理より

$$PH^2 (= QH^2) = EH \cdot GH = k^2 ab$$

円の接線の性質より

$$\angle OPH = 90^\circ$$

であるから, 三平方の定理より

$$OH = \sqrt{OP^2 + PH^2} = \sqrt{r^2 + k^2 ab}$$

$$\therefore MH = \sqrt{r^2 + k^2 ab} - m \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\angle EMH = \theta$ とおいて, $\triangle EMH$ と $\triangle FMH$ に余弦定理をあてはめると

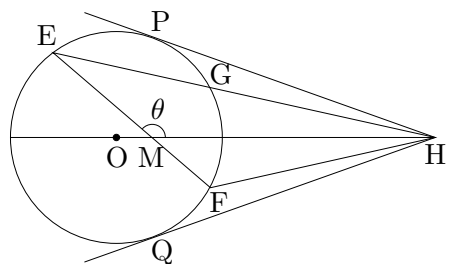
$$\cos \theta = \frac{a^2 + MH^2 - (ka)^2}{2a \cdot MH}, \quad \cos(\pi - \theta) = \frac{b^2 + MH^2 - (kb)^2}{2b \cdot MH}$$

補角の公式より $\cos \theta + \cos(\pi - \theta) = 0$ であるから

$$b(a^2 + MH^2 - k^2 a^2) + a(b^2 + MH^2 - k^2 b^2) = 0$$

$a + b$ で割ると

$$ab(1 - k^2) + MH^2 = 0$$



②を代入すると

$$\begin{aligned}ab(1 - k^2) + (\sqrt{r^2 + k^2ab} - m)^2 &= 0 \\ab + r^2 + m^2 - 2m\sqrt{r^2 + k^2ab} &= 0 \\ \therefore \sqrt{r^2 + k^2ab} &= \frac{ab + r^2 + m^2}{2m} \dots\dots ③\end{aligned}$$

点 M に関する方べきを考えると

$$ab = AM \cdot BM = AM^2 = r^2 - m^2 \dots\dots ④$$

であるから , ②, ③, ④, ① より

$$\begin{aligned}MH &= \frac{ab + r^2 + m^2}{2m} - m \\ &= \frac{(r^2 - m^2) + r^2 + m^2}{2m} - m \\ &= \frac{r^2}{m} - m \\ &= MN\end{aligned}$$

(証明おわり)