図チャレ 第43回(2005年4月)

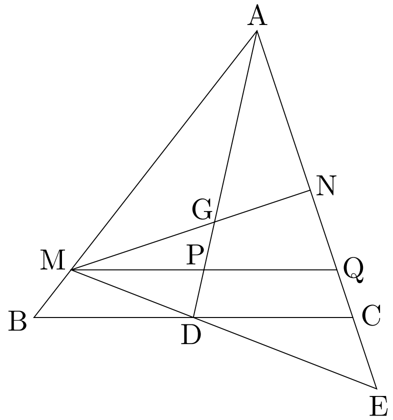
三角形 ABC の辺 AB 上の点 M と辺 AC 上の点 N とを結ぶ線分 MN 上に，三角形 ABC の重心 G がある。MG : GN = 3 : 2 のとき，以下の問いに答えよ。

(1) AM : MB と AN : NC を求めよ。

(2) D を辺 BC の中点とする。直線 MD と直線 AC の交点を E とするとき，AC : CE を求めよ。

出典：2005 年 東北大学

初等幾何による解法



(1) 点 M から辺 BC に平行に引いた直線と AD，AC の交点をそれぞれ P，Q とする。

$$\mathrm{MP} = \mathrm{PQ}$$

であるから，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{MG}}{\mathrm{GN}} \cdot \frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{AQ}} \cdot \frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{PM}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{AQ}} \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$\therefore\ \mathrm{AN} : \mathrm{AQ} = 2 : 3$$

$\triangle$APQ にメネラウスの定理をあてはめて

$$\frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{GP}} \cdot \frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{MQ}} \cdot \frac{\mathrm{QN}}{\mathrm{NA}} = \frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{GP}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\therefore\ \mathrm{AG} : \mathrm{GP} = 4 : 1$$

G は重心で AG : GD = 2 : 1 であるから，

$$\mathrm{AG} : \mathrm{GP} : \mathrm{PD} = 4 : 1 : 1$$

$$\therefore\ \mathrm{AM} : \mathrm{MB} = \mathrm{AP} : \mathrm{PD} = 5 : 1 \quad (\text{答})$$

また，

$$\mathrm{AQ} : \mathrm{QC} = \mathrm{AM} : \mathrm{MB} = 5 : 1 = 15 : 3$$

$$\mathrm{AN} : \mathrm{NQ} = 2 : 1 = 10 : 5$$

であるから，

$$\mathrm{AN} : \mathrm{NC} = 10 : (5 + 3) = 5 : 4 \quad (\text{答})$$

(2) $\triangle$ABC と直線 ME にメネラウスの定理をあてはめると

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}} \cdot \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DB}} \cdot \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{5} = 1$$

$$\mathrm{AE} : \mathrm{EC} = (\mathrm{AC} + \mathrm{CE}) : \mathrm{EC} = 5 : 1$$

$$\therefore\ \mathrm{AC} : \mathrm{CE} = 4 : 1 \quad (\text{答})$$

ベクトルによる解法

(1) G は $\triangle$ABC の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

MG : GN $=3:2$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AN}}$$

点 M は辺 AB 上，点 N は辺 AC 上にあり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は線型独立であるから，

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AM}},\quad \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AN}}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\therefore\quad \mathrm{AM}:\mathrm{MB}=5:1,\quad \mathrm{AN}:\mathrm{NC}=5:4\quad (\text{答})$$

(2) D は BC の中点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}}&=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\frac{2}{5}\left(\frac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\end{aligned}$$

点 E は直線 AC 上にあり，点 D は直線 ME 上にあるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\therefore\quad \mathrm{AC}:\mathrm{CE}=4:1\quad (\text{答})$$