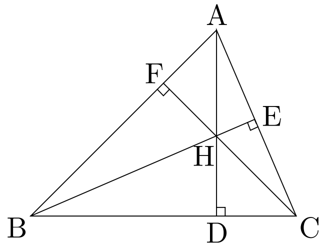
図チャレ 第44回 (2005年5月)

鋭角三角形ABCにおいて，頂点A，B，Cから対辺BC，CA，ABにおろした垂線の足をそれぞれD，E，Fとする。

(1) $\angle \mathrm{ADE} = \angle \mathrm{ACF}$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $\triangle \mathrm{ABC}$ の垂心は $\triangle \mathrm{DEF}$ の内心であることを証明せよ。

解答



$\triangle \mathrm{ABC}$ の垂心(AD，BE，CFの交点)をHとする。

(1) $\angle \mathrm{HDC} = \angle \mathrm{HEC} = 90^\circ$ であり，

$$\angle \mathrm{HDC} + \angle \mathrm{HEC} = 180^\circ$$

であることより，4点D，C，E，Hは同一円周上にあるから，

$$\angle \mathrm{HDE} = \angle \mathrm{HCE}$$

$$\therefore \ \angle \mathrm{ADE} = \angle \mathrm{ACF}$$

(証明おわり)

(2) (1)において

$$\angle \mathrm{ADE} = \angle \mathrm{ACF}$$

を導いたのと同様にして，4点B，D，H，Fが同一円周上にあることより

$$\angle \mathrm{HDF} = \angle \mathrm{ABE}$$

$\angle \mathrm{ACF} = 90^\circ - \angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{ABE}$ であるから

$$\angle \mathrm{HDE} = \angle \mathrm{HDF}$$

以上と同様の議論により，

$$\angle \mathrm{HED} = \angle \mathrm{HEF}, \quad \angle \mathrm{HFE} = \angle \mathrm{HFD}$$

も導かれるから，Hは $\triangle \mathrm{DEF}$ の内角の二等分線の交点である。

よって，$\triangle \mathrm{ABC}$ の垂心Hは $\triangle \mathrm{DEF}$ の内心である。 (証明おわり)