

図チャレ 第45回 (2005年6月)

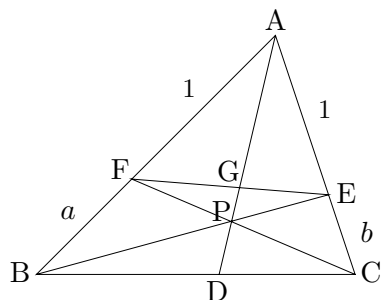
△ABCの内部に点Pをとり、直線APと辺BCの交点をD、直線BPと辺CAの交点をE、直線CPと辺ABの交点をFとする。さらに、線分ADと線分EFの交点をGとし、AF:FB=1:a、AE:EC=1:bとする。

- (1) $\frac{BD}{DC}$ の値をa, bで表せ。
- (2) 「DがBCの中点」と「GがEFの中点」が同値であることを証明せよ。

解答

- (1) △ABCにおいて、チェバの定理より

$$\begin{aligned} \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} &= 1 \\ \frac{BD}{DC} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{1}{a} &= 1 \\ \therefore \frac{BD}{DC} &= \frac{a}{b} \quad \dots\dots \textcircled{1} \text{ (答)} \end{aligned}$$



- (2) △AFEにおいて、チェバの定理より

$$\begin{aligned} \frac{FG}{GE} \cdot \frac{EC}{CA} \cdot \frac{AB}{BF} &= \frac{FG}{GE} \cdot \frac{b}{b+1} \cdot \frac{a+1}{a} = 1 \\ \therefore \frac{FG}{GE} &= \frac{1 + \frac{1}{b}}{1 + \frac{1}{a}} \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ②より

$$\begin{aligned} \text{「DがBCの中点」} &\iff \frac{BD}{DC} = 1 \\ &\iff a = b \\ &\iff \frac{FG}{GE} = 1 \\ &\iff \text{「GがEFの中点」} \end{aligned}$$

(証明おわり)