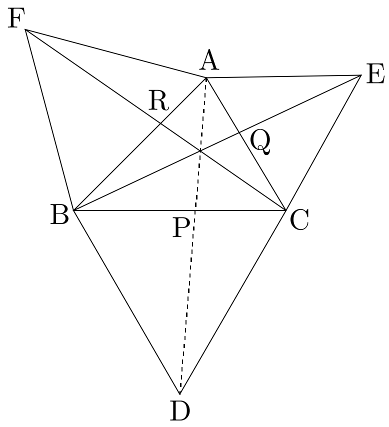
図チャレ 第46回 (2005年7月)

鋭角三角形ABCの外側に3つの正三角形BCD, CAE, ABFを作る。

(1) $\triangle\mathrm{ABE} \equiv \triangle\mathrm{AFC}$ であることを示せ。

(2) 3つの線分AD, BE, CFは1点で交わることを示せ。

解答



(1) $\triangle\mathrm{ABF}$ は正三角形であるから

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AF}$$

$\triangle\mathrm{CAE}$ は正三角形であるから

$$\mathrm{AE} = \mathrm{AC}$$

$\angle\mathrm{BAE} = \angle\mathrm{BAE} + 60^\circ = \angle\mathrm{FAC}$ であるから,

二辺挟角相等により

$$\triangle\mathrm{ABE} \equiv \triangle\mathrm{AFC}$$

(証明おわり)

(2) 線分ADと辺BCの交点をP, 線分BEと辺CAの交点をQ, 線分CFと辺ABの交点をRとすると

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} = \frac{\triangle\mathrm{BDA}}{\triangle\mathrm{CAD}},\quad \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} = \frac{\triangle\mathrm{CEB}}{\triangle\mathrm{ABE}},\quad \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = \frac{\triangle\mathrm{AFC}}{\triangle\mathrm{BCF}} \qquad \cdots\cdots (*)$$

(1)より

$$\triangle\mathrm{ABE} \equiv \triangle\mathrm{AFC}$$

であり, 同様にして

$$\triangle\mathrm{BCF} \equiv \triangle\mathrm{BDA},\quad \triangle\mathrm{CAD} \equiv \triangle\mathrm{CEB}$$

も示されるから, $(*)$より

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$$

チェバの定理より, 3線分AP, BQ, CRは1点で交わり, したがって3線分AD, BE, CFは1点で交わる。

(証明おわり)