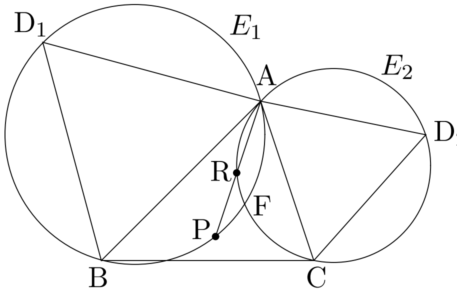
図チャレ 第47回 (2005年8月)

　鋭角三角形ABCの内部に，次の条件を満たす3点P，Q，Rが存在することを証明せよ。

　(条件)　線分AP上に点R，線分BQ上に点P，線分CR上に点Qがあり，
　　　　$\triangle$PQRは正三角形である。

解答

　$\triangle$ABCの外側に2つの正三角形$\mathrm{ABD_1}$，$\mathrm{ABD_2}$を描き，正三角形$\mathrm{ABD_1}$の外接円をE_1，正三角形$\mathrm{ACD_2}$の外接円をE_2とする。



　$\angle$ABCは鋭角で，特に

$$\angle \mathrm{ABC} < 120^\circ$$

であるから，$\mathrm{E_1}$と$\mathrm{E_2}$はA以外に交点Fをもち，Fは劣弧AB上および劣弧AC上にある。3線分AF，BF，CFは点Fにおいて120°ずつの角をなすから，

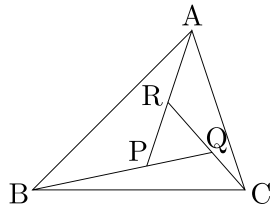
　　　　　交点Fは$\triangle$ABCの内部

にある。

　円E_1の劣弧BF上に点Pを，線分APと円E_2がA以外の交点Rをもつようにとる。点Pを点Fの十分近くにとることにより，$\triangle$ABCの内部にすることができる。さらに，直線BPと線分CRの交点をQとすると，線分AP上にR，線分BQ上にP，線分CR上にQがある。

　円E_1，E_2における円周角の性質より

$$\angle \mathrm{APB} = 180^\circ - \angle \mathrm{AD_1B} = 120^\circ$$
$$\angle \mathrm{ARC} = 180^\circ - \angle \mathrm{AD_2C} = 120^\circ$$



であるから

$$\angle \mathrm{RPQ} = 180^\circ - \angle \mathrm{APB} = 60^\circ$$
$$\angle \mathrm{QRP} = 180^\circ - \angle \mathrm{ARC} = 60^\circ$$
$$\angle \mathrm{PQR} = 180^\circ - (\angle \mathrm{RPQ} + \angle \mathrm{QRP}) = 60^\circ$$

となり，$\triangle$PQRは正三角形である。

(証明おわり)