図チャレ 第48回 (2005年9月)

四角形ABCDの辺ABの中点をE，辺BCの中点をF，辺CDの中点をG，辺DAの中点をHとする。

(1) 四角形EFGHは平行四辺形であることを示せ。

(2) ACとBDの交点がEGとFHの交点に一致するとき，四角形ABCDは平行四辺形となることを示せ。

解答

(1) 位置ベクトルを A($\overrightarrow{a}$)，B($\overrightarrow{b}$)，C($\overrightarrow{c}$)，D($\overrightarrow{d}$) で表すと，

$$\mathrm{E}\left(\frac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{2}\right),\ \ \mathrm{F}\left(\frac{\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}}{2}\right),\ \ \mathrm{G}\left(\frac{\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}}{2}\right),\ \ \mathrm{H}\left(\frac{\overrightarrow{d}+\overrightarrow{a}}{2}\right)$$

であり，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{2}+\frac{\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}}{2}+\frac{\overrightarrow{d}+\overrightarrow{a}}{2}\right)$$

よりEGとFHは互いに中点で交わるから，四角形EFGHは平行四辺形である。

(証明おわり)

(2) ACの中点をM，BDの中点をNとすると，

$$\mathrm{M}\left(\frac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}}{2}\right),\ \ \mathrm{N}\left(\frac{\overrightarrow{b}+\overrightarrow{d}}{2}\right)$$

であり，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}}{2}+\frac{\overrightarrow{b}+\overrightarrow{d}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{2}+\frac{\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}}{2}\right)$$

であるから，MNの中点はEGとFHの交点Pと一致する。

ACとBDの交点がPであるとき $\mathrm{M} \neq \mathrm{N}$ であるとすれば，PはMNの中点であるから $\mathrm{P} \neq \mathrm{M}$，$\mathrm{P} \neq \mathrm{N}$ となる。

2点P，Mは直線AC上

にあるから直線PMと直線ACは一致し，

2点P，Nは直線BD上

にあるから直線PNと直線BDは一致する。3点M，P，Nは同一直線上にあるから，2つの対角線AC，BDが同一直線上となって矛盾する。

したがって，

$$\mathrm{M} = \mathrm{N}$$

となって，四角形ABCDは対角線が互いの中点で交わるから平行四辺形である。

(証明おわり)