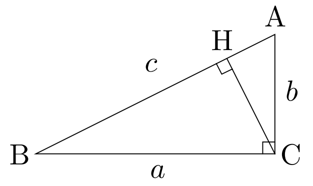
図チャレ 第49回(2005年10月)

$\angle$C を直角とする直角三角形 ABC に対して，正方形 BCDE と正方形 CAFG を三角形 ABC の外側に作る。点 C から辺 AB におろした垂線の足を H とするとき，3 直線 AE, BF, CH は 1 点で交わることを証明せよ。

解答



$\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$, $\mathrm{AB}=c$ とおく。

$\triangle\mathrm{ACH} \backsim \triangle\mathrm{ABC}$ より

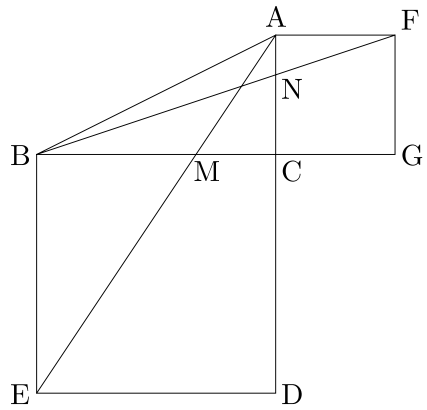
$$\mathrm{AC}:\mathrm{AH}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$$
$$b:\mathrm{AH}=c:b$$
$$\therefore\ \mathrm{AH}=\frac{b^2}{c}$$

同様にして

$$\mathrm{BH}=\frac{a^2}{c}$$

であるから，

$$\mathrm{AH}:\mathrm{BH}=b^2:a^2 \qquad \cdots\cdots ①$$



AE と BC の交点を M とすると，

$$\triangle\mathrm{BEM} \backsim \triangle\mathrm{CAM}$$

より

$$\mathrm{BM}:\mathrm{CM}=\mathrm{BE}:\mathrm{CA}$$
$$=a:b \qquad \cdots\cdots ②$$

BF と CA の交点を N とすると，

$$\triangle\mathrm{BCN} \backsim \triangle\mathrm{FAN}$$

より

$$\mathrm{CN}:\mathrm{AN}=\mathrm{BC}:\mathrm{FA}$$
$$=a:b \qquad \cdots\cdots ③$$

①, ②, ③ より

$$\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HB}}\cdot\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{MC}}\cdot\frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{NA}}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=1$$

よって，チェバの定理(の逆)より，3 直線 AE, BF, CH は 1 点で交わる。

(証明おわり)