# 図チャレ 第51回(2005年12月)

三角形ABCの内接円と辺BC, CA, ABとの接点をそれぞれD, E, Fとし，直線BCと直線EFは点Pで交わるとする。

(1) BP : CP = BD : DCが成り立つことを示せ。

(2) さらに，直線CAと直線FDが点Qで交わり，直線ABと直線DEが点Rで交わるとき，3点P, Q, Rは同一直線上にあることを示せ。

## 解答

(1) メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

円の外部の点から円に引いた接線の長さは等しいから

$$\mathrm{AE}=\mathrm{AF},\ \mathrm{BF}=\mathrm{BD},\ \mathrm{CD}=\mathrm{CE}$$

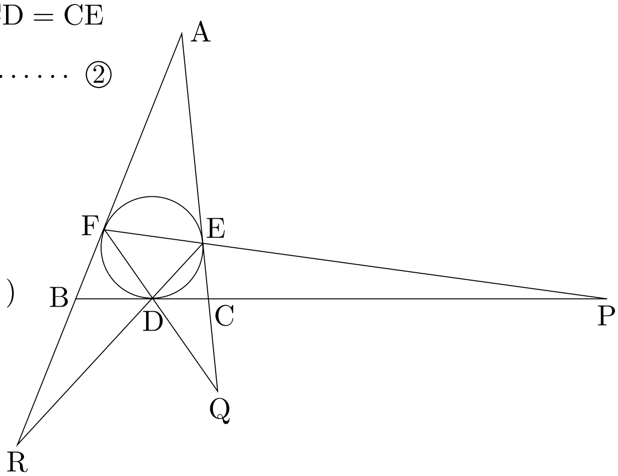
$$\therefore\ \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=1 \qquad \cdots\cdots ②$$

①かつ② より

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}$$

$$\therefore\ \mathrm{BP}:\mathrm{PC}=\mathrm{BD}:\mathrm{DC}$$

(証明おわり)




(注) ②とチェバの定理よりAD, BE, CFが1点で交わることが導かれるのは有名。

(2) (1)より

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}$$

同様にして

$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}},\quad \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}$$

も成り立つから，②より

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=1$$

P, Q, Rはそれぞれ辺BC, CA, ABの延長上にあるから，メネラウスの定理(の逆)より，3点P, Q, Rは同一直線上にある。 (証明おわり)