# 図チャレ 第52回(2006年1月)

円 $C$ 上の点 P を 1 つの頂点とし，円 $C$ に内接する正 2006 角形と正 18 角形の(P を含めた)共有点の個数を求めよ。

## 解答

$2006 = 2 \times 17 \times 59,\ 18 = 2 \times 3^2$ と素因数分解され，

$$gcd(2006,\ 18) = 2$$

となることより，共通の頂点は P とその直径対点 Q の 2 点のみである。

正 2006 角形の頂点を点 P から反時計まわりに $\mathrm{P} = \mathrm{A}_0,\ \mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{2005}$ とし，正 18 角形の頂点を点 P から反時計まわりに $\mathrm{P} = \mathrm{B}_0,\ \mathrm{B}_1,\ \mathrm{B}_2,\ \cdots,\ \mathrm{B}_{17}$ とする。

$\mathrm{B}_1$ が $\mathrm{A}_n$ と $\mathrm{A}_{n+1}$ の間にあるとすれば，$\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_n$ は直線 $\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1$ に関して同じ側にあるから，辺 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_2\mathrm{A}_3,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$ は正 18 角形と共有点を持たず，辺 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ は辺 $\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1$ および $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2$ と交わる。$\mathrm{A}_{n+1}$ 以降も同様のことが繰り返されるから，P と Q 以外の共有点は正 18 角形の頂点の前後で 2 つずつ存在するのみである。

よって，円 $C$ に内接し頂点 P を共有する正 2006 角形と正 18 角形の共有点の個数は

$$2 + 16 \times 2 = 34 \text{ 個} \quad \text{(答)}$$

である。