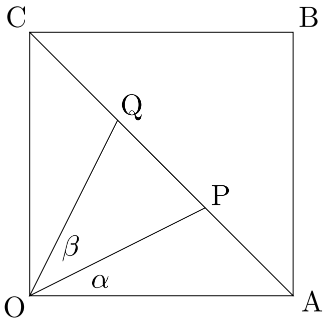
図チャレ 第54回(2006年3月)

正方形 OABC の対角線 AC を 3 等分し，図のように，A に近い点を P，C に近い点を Q とする。また，$\angle \mathrm{AOP} = \alpha$，$\angle \mathrm{POQ} = \beta$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\cos\alpha$，$\cos\beta$ の値を求めよ。

(2)　$\alpha < \dfrac{\pi}{6} < \beta$ を示せ。

(3)　線分 PQ の間に点 R を $\angle \mathrm{POR} = \alpha$ となるようにとる。このとき，比 AR：RC を求めよ。



出典：2006 年 広島大学

解答

正方形 OABC の一辺の長さが 3 として議論しても，本問では一般性を失わない。

(1) P，Q から辺 OA におろした垂線の足をそれぞれ M，N とすると，

$$\mathrm{PM} /\!/ \mathrm{QN} /\!/ \mathrm{CO}$$

$$\mathrm{AP} = \mathrm{PQ} = \mathrm{QC}$$

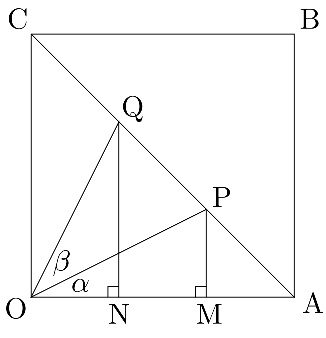
より

$$\mathrm{AM} = \mathrm{MN} = \mathrm{NO} = 1$$

であるから，2 つの直角三角形 OPM，OQN に注目すると

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OP}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad (答)$$

$$\cos\beta = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (答)$$



(2) $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{15}}{2\sqrt{5}}$ と $\cos\alpha,\ \cos\beta$ との大小を比べると,

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{16}}{2\sqrt{5}}$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4}}{2\sqrt{5}}$$

より

$$\cos\alpha > \cos\frac{\pi}{6} > \cos\beta$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において $\cos\theta$ は減少関数であるから

$$\alpha < \frac{\pi}{6} < \beta$$

である。 (おわり)

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (3,\ 0),\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} = (0,\ 3)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (2,\ 1)$$

$\mathrm{AR} : \mathrm{RC} = t : (1-t)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (3(1-t),\ 3t)$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}| = 3\sqrt{(1-t)^2+t^2} = 3\sqrt{2t^2-2t+1}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}} = 2\times 3(1-t) + 1\times 3t = 3(2-t)$$

内積の定義より $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}} = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OR}}|\cos\alpha$ であるから

$$3(2-t) = \sqrt{5}\times 3\sqrt{2t^2-2t+1}\times\frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$(2-t)^2 = 2^2(2t^2-2t+1)$$
$$t(7t-4) = 0$$

$\mathrm{R} \neq \mathrm{A}$ より $t \neq 0$ であるから

$$t = \frac{4}{7} \qquad \therefore\ \mathrm{AR} : \mathrm{RC} = 4 : 3 \quad (\text{答})$$