図チャレ 第55回(2006年4月)

四角形ABCDは$\angle B = 120°$，$CD = DA = AC$を満たしているとする。このとき，次の問いに答えよ。

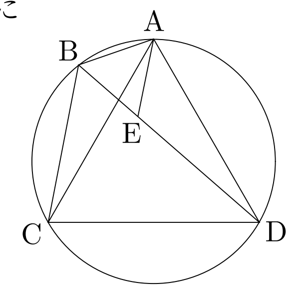
(1) $AB < BD$であることを示せ。

(2) 線分BD上に$AB = BE$となる点Eをとるとき，$\angle BAE$の大きさを求めよ。

(3) $AB + BC = BD$であることを示せ。

出典：2006年 新潟大学

解答



(1) $CD = DA = AC$より$\triangle ACD$は正三角形であり，特に

$$\angle CDA = \angle CAD \ (= 60°)$$

であるから，

$$\angle BDA < \angle CDA = \angle CAD < \angle BAD$$

$\triangle ABD$において，対辺の長さを考えて

$$AB < BD$$ (証明おわり)

(2) $\angle ABC = 120°$，$\angle ADC = 60°$より四角形ABCDは1つの円に内接し，円周角を考えると

$$\angle ABE = \angle ABD = \angle ACD = 60°$$

であるから，$AB = BE$より

$$\triangle ABE は正三角形$$

である。特に，

$$\angle BAE = 60°$$ (答)

(3) $\triangle ABC$と$\triangle AED$について考えると，$\triangle ABE$と$\triangle ACD$は正三角形であるから

$$AB = AE, \quad AC = AD$$

さらに，

$$\angle BAC = 60° - \angle CAE = \angle EAD$$

であるから，2辺挟角相等により

$$\triangle ABC \equiv \triangle AED$$

である。特に，$BC = ED$であるから

$$AB + BC = AE + ED = BE + ED = BD$$ (証明おわり)

(注) $\angle B$は四角形ABCDの内角と解釈するのが自然だと思われる。また，点Bが四角形ABCDの内部にあると，問題が成立しなくなる。