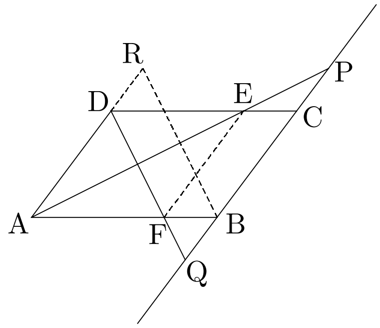
図チャレ 第57回 (2006年6月)

$AB > AD$ である平行四辺形 ABCD の辺 CD 上に点 E, 辺 AB 上に点 F をとり，直線 AE と直線 BC の交点を P, 直線 DF と直線 BC の交点を Q とする。$BP = CQ = AB$ のとき，直線 AE と直線 DF は直交することを示せ。

解答



$AB /\!/ EC$ より

$$\triangle PAB \backsim \triangle PEC$$

であるから，$AB = BP$ より

$$EC = CP$$

である。したがって，

$$\begin{aligned} DE = DC - EC &= AB - EC \\ &= BP - CP \\ &= BC \end{aligned}$$

同様に，$DC /\!/ FB$ より

$$\triangle CDQ \backsim \triangle BFQ,\ AF = BC$$

も成り立つから

$$DE = AF = BC = AD$$

となって，四角形 AFED はひし形である。

特に，2 つの対角線 AE, DF は直交する。

(おわり)

別解

点 B を通り，QD に平行な直線と直線 AD の交点を R とする。

$BR /\!/ QD$, $BQ /\!/ RD$ より四角形 BRDQ は平行四辺形であるから，特に

$$RD = BQ$$

$BP = CQ\ (= AB)$ より

$$BQ = CQ - BC = BP - BC = CP$$

であるから，

$$AR = AD + DR = BC + BQ = BC + CP = BP$$

したがって，$AR /\!/ BP$ より四角形 ABPR は平行四辺形となって，$AB = RP$ も成り立つから，仮定 $AB = BP$ とあわせて

四角形 ABPR はひし形

となる。ゆえに，

$$AP \perp BR /\!/ DQ \quad すなわち \quad AE \perp DF$$

(おわり)