図チャレ 第59回(2006年8月)

半径 r の2円 C_1, C_2 は異なる2点P, Qで交わり，中心間距離を $2a$ $(0 < a < r)$ とする。直線 ℓ は円 C_1 と異なる2点K, Mで，円 C_2 と異なる2点L, Nで交わり，4点K, L, M, Nはこの順に並ぶ。

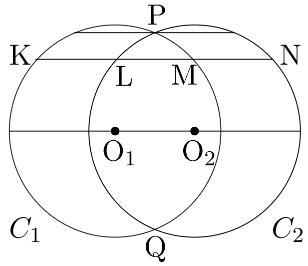
(1) $0 < a \leqq \dfrac{r}{2}$ のとき，KL＝LM＝MN となる直線 ℓ が存在することを示せ。

(2) $\dfrac{r}{2} \leqq a < r$ のとき，PQの中点を通る直線 ℓ で KL＝LM＝MN となるものが存在することを示せ。

(3) a を変化させるとき，KL＝LM＝MN となる線分 KN の長さの最大値を求めよ。

解答

円 C_1 の中心を $\mathrm{O_1}$，円 C_2 の中心を $\mathrm{O_2}$ とする。



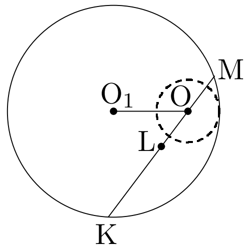
(1) C_1 と C_2 は，中心間距離 $2a$ の分だけ互いに平行移動したものであるから，直線 ℓ を線分PQに直交させながら動かすと，つねに

$$\mathrm{KL} = \mathrm{MN} = 2a$$

である。

ℓ がPに近いときは $\mathrm{LM} < 2a$，ℓ が $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$ を通るとき $\mathrm{LM} = 2r - 2a\,(> 2a)$ であり，Pから $\mathrm{O_1O_2}$ の中点に向けて LM の長さは単調増加であるから，$\mathrm{LM} = 2a$ となるときがある。

(おわり)



(2) $\mathrm{O_1O_2}$ の中点をOとすると，直線 ℓ がOを通るとき LMの中点もOであるから，

$$\mathrm{KL} = \mathrm{LM} \iff \mathrm{KO} : \mathrm{OM} = 3 : 1$$

したがって，

$$\mathrm{OM} = b,\quad \mathrm{OK} = 3b,\quad b \geqq r - a$$

となる実数 b が存在することを示せばよい。

必要条件として，点Oに関する円 C_1 の方べきを考えると

$$b \cdot 3b = (r-a)(r+a) \quad (a = \mathrm{O_1O})$$

$$\therefore\ b = \sqrt{\frac{(r-a)(r+a)}{3}}$$

$2a \geqq r$ より

$$b - (r-a) = \frac{\sqrt{r-a}\left(\sqrt{r+a} - \sqrt{3}\sqrt{r-a}\right)}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{r-a}\,(4a - 2r)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{r+a} + \sqrt{3}\sqrt{r-a}\right)} \geqq 0$$

であるから，このような正の実数 b は存在する。 (おわり)

(3) $\mathrm{KM} \leqq 2r$ (直径) であるから，

$$\mathrm{KL} = \mathrm{LM} = \mathrm{MN} \Longrightarrow \mathrm{KL} + \mathrm{LM} + \mathrm{MN} \leqq 3r$$

$2a = r$， $\mathrm{L} = \mathrm{O}_1$， $\mathrm{M} = \mathrm{O}_2$ のとき $\mathrm{KL} = \mathrm{LM} = \mathrm{MN} = r$ となるから，

線分 KN の長さの最大値は $3r$ (答)

である。