図チャレ 第60回(2006年9月)

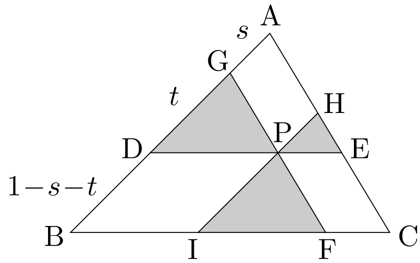
三角形ABCの内部に点Pをとる。点Pを通って辺BCに平行な直線と辺AB, CAとの交点をそれぞれD, Eとし，点Pを通って辺CAに平行な直線と辺BC, ABとの交点をそれぞれF, Gとし，点Pを通って辺ABに平行な直線と辺CA, BCとの交点をそれぞれH, Iとする。

△PIF, △PEH, △PGDの面積の和Sが最小となる点Pの位置を求めよ。

解答

$$\mathrm{AG} = s\mathrm{AB},\ \ \mathrm{GD} = t\mathrm{AB},\ \ s > 0,\ \ t > 0,\ \ s + t < 1$$

とし，△ABCの面積をmとおく。



四角形BIPDは平行四辺形であるから

$$\mathrm{PI} = \mathrm{DB} = (1-s-t)\mathrm{AB}$$

であり，△PIF ∽ △ABCであるから

$$(\triangle\mathrm{PIF}\text{ の面積}) = (1-s-t)^2 m$$

あとの2つの三角形についても同様に，

$$\mathrm{HP} = s\mathrm{AB},\ \ \triangle\mathrm{HPE} \backsim \triangle\mathrm{ABC}$$

より

$$(\triangle\mathrm{PEH}\text{ の面積}) = s^2 m,$$

△GDP ∽ △ABCより

$$(\triangle\mathrm{PGD}\text{ の面積}) = t^2 m$$

であるから，

$$\begin{aligned} S &= m\{(1-s-t)^2 + s^2 + t^2\} \\ &= m\{2s^2 - 2(1-t)s + 2t^2 - 2t + 1\} \\ &= m\left\{2\left(s - \frac{1-t}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}\right\} \\ &= m\left\{2\left(s - \frac{1-t}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\right\} \end{aligned}$$

よって，Sは

$$s - \frac{1-t}{2} = 0 \text{ かつ } t - \frac{1}{3} = 0,\ \ \text{すなわち } s = t = \frac{1}{3}$$

のとき最小となる。

このとき，G, Dは辺ABの3等分点であり，DI∥GFより

$$\mathrm{BI} : \mathrm{IF} : \mathrm{FC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DG} : \mathrm{GA}$$

であるから，

I, Fは辺BCの3等分点

である。

直線 AP と辺 BC の交点を M とすると，DE∥BC より

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PM} = \mathrm{AD} : \mathrm{DB} = 2 : 1,$$

AB∥PI より

$$\mathrm{BI} : \mathrm{IM} = \mathrm{AP} : \mathrm{PM} = 2 : 1$$

であるから，

M は BC の中点，すなわち AP の延長は △ABC の中線

である。同様に，BP の延長と CP の延長も △ABC の中線となるから，

S が最小となるとき，点 P は △ABC の重心　(答)

である。