図チャレ 第61回(2006年10月)

円に内接する四角形ABCDがあり，辺ABのAの側への延長と辺CDのDの側への延長が点Pで交わるものとする。

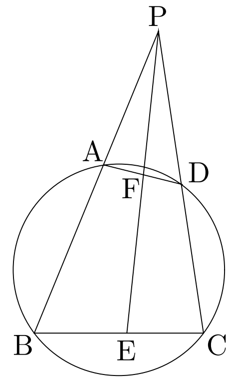
(1) $\triangle \mathrm{PBC} \backsim \triangle \mathrm{PDA}$ であることを示せ。

(2) 辺BC上に端点でない点Eをとり，線分PEと辺ADの交点をFとする。

$$\mathrm{BE} : \mathrm{EC} = \mathrm{DF} : \mathrm{FA}$$

ならば，線分PEは $\angle \mathrm{BPC}$ の二等分線であることを示せ。

解答



(1) 円に内接する四角形の対角は互いに補角であるから

$$\angle \mathrm{PBC} = \angle \mathrm{PDA}$$

$\angle \mathrm{P}$ は共通であるから，２角相等により

$$\triangle \mathrm{PBC} \backsim \triangle \mathrm{PDA}$$

(証明おわり)

(2) $\triangle \mathrm{PBE}$ と $\triangle \mathrm{PDF}$ を考える。$\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}} = \dfrac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FA}}$ より

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{DA}} \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

$\triangle \mathrm{PBC} \backsim \triangle \mathrm{PDA}$ より

$$\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{DA}} \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

①かつ②より

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{PB}} = \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{PD}}$$

既に示したように $\angle \mathrm{PBC} = \angle \mathrm{PDA}$ であるから，２辺の長さの比とそのはさむ角の大きさが等しいことより

$$\triangle \mathrm{PBE} \backsim \triangle \mathrm{PDF}$$

したがって，特に

$$\angle \mathrm{BPE} = \angle \mathrm{DPF}$$

となるから，線分PEは $\angle \mathrm{BPC}$ を二等分する。　(証明おわり)