# 図チャレ 第62回(2006年11月)

一辺の長さが1である立方体 ABCD−EFGH の4頂点を結んでできる2つの正四面体 ACFH, BDEG の共通部分 $K$ の体積 $V$ を求めよ。

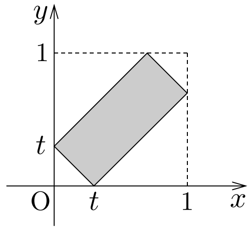
## 解答

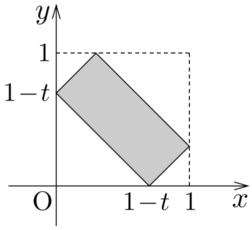
座標空間において

$$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{C}(1,\ 1,\ 0),\ \mathrm{D}(0,\ 1,\ 0)$$
$$\mathrm{E}(0,\ 0,\ 1),\ \mathrm{F}(1,\ 0,\ 1),\ \mathrm{G}(1,\ 1,\ 1),\ \mathrm{H}(0,\ 1,\ 1)$$

とおく。

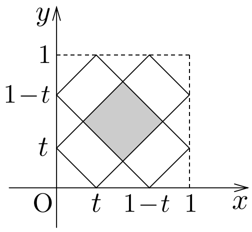
平面 $z=t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ により正四面体 ACFH, BDEG を切るとき，断面はそれぞれ



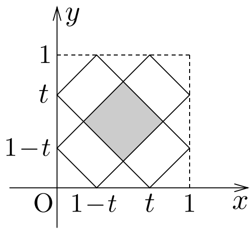




であるから，平面 $z=t$ による $K$ の断面は次図の網目部分である。

$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき




$\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき




断面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \begin{cases} (\sqrt{2}\,t)^2 = 2t^2 & \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\[2ex] \left\{\sqrt{2}\,(1-t)\right\}^2 = 2(t-1)^2 & \left(\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1\right) \end{cases}$$

共通部分 $K$ の体積 $V$ は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 S(t)\,dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} 2t^2\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 2(t-1)^2\,dt \\ &= \left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{2}{3}(t-1)^3\right]_{\frac{1}{2}}^1 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} \quad \text{(答)}$$

(注)

1° 共通部分 $K$ の正体は，底面が一辺の長さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の正方形，高さ $\dfrac{1}{2}$ の正四角錐を 2 つあわせた図形であり，それに気づけば体積 $V$ を

$$V = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\times 2 = \frac{1}{6}$$

と求めることもできる。

2° 2007 年に大阪大学で本問と全く同じ出題がなされている。