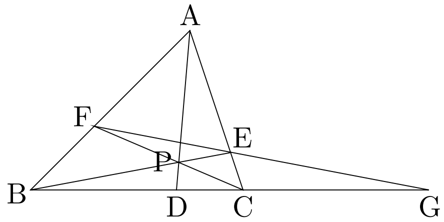
図チャレ 第63回(2006年12月)

三角形ABCの内部に点Pがあり，直線APと辺BCの交点をD，直線BPと辺CAの交点をE，直線CPと辺ABの交点をFとする。直線BCと直線EFが点Gで交わり，Gから直線ADにおろした垂線の足HがDと異なるとき，線分HDは∠BHCを2等分することを示せ。

解答



チェバの定理より

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=1 \qquad \cdots\cdots ②$$

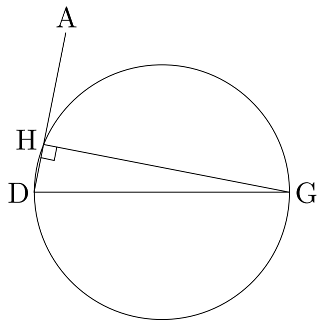
①, ②より

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{BG}:\mathrm{GD}$$

この比を$a:b$として

$$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=a:b$$

である点Qの軌跡を描くと，DGを直径とする円(アポロニウスの円)になる。このとき，円周角の性質より，任意の点Qに対して



$$\angle\mathrm{DQG}=90^\circ$$

であるから，点Hはこの円周上にある。したがって，

$$\mathrm{BH}:\mathrm{HC}=\mathrm{BD}:\mathrm{DC}$$

であり，線分HDは∠BHCを2等分する。

(証明おわり)