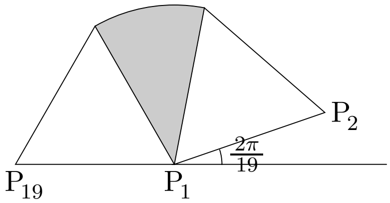
図チャレ 第64回(2007年1月)

一辺の長さ 1 の正 19 角形と一辺を共有する正三角形を正 19 角形の内部におく。この正三角形が正 19 角形の内部を滑らずに転がるとき，正三角形が通過する範囲の面積を求めよ。

解答



正三角形が通過する範囲は，正 19 角形の内部に各辺を共有する 19 個の正三角形の周と内部，およびその 19 個の間を半径 1 の扇形で埋めた領域である。

正 19 角形の 1 つの外角は $\dfrac{2\pi}{19}$

であるから，19 個の扇形の中心角は

$$\pi-\left(\frac{\pi}{3}\times 2+\frac{2\pi}{19}\right)=\frac{57-38-6}{57}\pi=\frac{13}{57}\pi$$

求める領域の面積 S は，一辺の長さ 1 の正三角形 19 個と半径 1，中心角 $\dfrac{13}{57}\pi$ の扇形 19 個の面積の総和であり，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\times 1^2\times\sin\frac{\pi}{3}\times 19+\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{13}{57}\pi\times 19 \\ &= \frac{19\sqrt{3}}{4}+\frac{13}{6}\pi \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(注) 上の解答では，一辺の長さ 1 の正 19 角形の外接円の半径 R が 1 より大きいことを前提にしているが，実際

$$R=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sin\frac{\pi}{19}}>\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{6}}=1$$

が成り立つ。