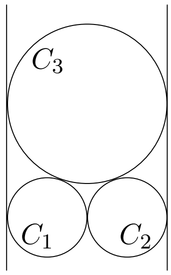
図チャレ 第65回 (2007年2月)

外接する半径1の円 C_1, C_2 が △PQR の内部(周上も含む)にあり，円 C_1 は2辺 PQ, QR に接し，円 C_2 は2辺 QR, RP に接する。さらに，半径 r の円 C_3 は2円 C_1, C_2 と外接し，2辺 PQ, PR と接する。

(1) r のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) △PQR の面積 S の最小値を求めよ。

解答



(1) C_1 と C_3 の共通接線の一つが C_2 と C_3 の共通接線の一つと平行になるのは，

$$r = 2$$

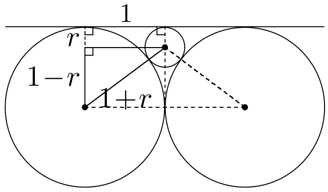
のときである。

直線 QR でない C_1 と C_2 の共通接線に C_3 が接するのは，$0 < r < 1$ のもとで

$$(1+r)^2 = (1-r)^2 + 1^2$$

のときであり，これを計算すると

$$2r = -2r + 1 \qquad \therefore \quad r = \frac{1}{4}$$



△PQR が存在するための条件は，C_3 の半径 r が以上で求めた2つの値の間にあることであるから，r のとり得る値の範囲は

$$\frac{1}{4} < r < 2 \quad \text{(答)}$$

(2) QR の中点を M，円 C_1 の中心を C，線分 PQ, QM と円 C_1 との接点をそれぞれ D, E とする。

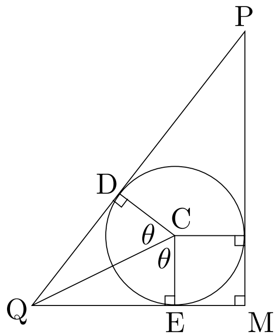
$$\angle \mathrm{QCD} = \angle \mathrm{QCE} = \theta \quad \left(\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと，

$$\angle \mathrm{PQM} = \pi - 2\theta$$

$\mathrm{CE} = \mathrm{EM} = (C_1 \text{ の半径}) = 1$ より

$$\mathrm{QE} = \tan\theta, \quad \mathrm{QM} = \tan\theta + 1$$



であるから，補角の公式と2倍角の公式より

$$\begin{aligned}\mathrm{PM} = \mathrm{QM}\tan(\pi - 2\theta) &= (\tan\theta + 1)(-\tan 2\theta) \\ &= (\tan\theta + 1)\frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta - 1} \\ &= \frac{2\tan\theta}{\tan\theta - 1}\end{aligned}$$

$\tan\theta = t\,(>1)$ とおくと，$\triangle$PQR の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\cdot 2\,\mathrm{QM}\cdot\mathrm{PM} = \frac{2t(t+1)}{t-1}$$
$$= \frac{2(t-1+1)(t-1+2)}{t-1}$$
$$= 2\cdot\frac{(t-1)^2+3(t-1)+2}{t-1}$$
$$= 2\left(t-1+\frac{2}{t-1}+3\right)$$

相加・相乗平均の不等式より

$$S \geqq 2\left(2\sqrt{(t-1)\cdot\frac{2}{t-1}}+3\right) = 4\sqrt{2}+6$$

ここで，不等式の等号は

$$t-1 = \frac{2}{t-1} > 0 \quad \text{すなわち} \quad t = 1+\sqrt{2}$$

のとき成り立つから，

$\triangle$PQR の面積 S の最小値は $4\sqrt{2}+6$　(答)

である。

(注)　(2)では，S を C_3 の半径 r で表すことにこだわると，計算が複雑になる。2 円 C_1，C_2 に接する任意の三角形 PQR に対して，円 C_3 を描くことができることに注目して，適切な変数設定をすることも重要なポイントである。上の解答では角度を変数にとったが，線分の長さを変数にとって，相似な直角三角形を考えてもよい。

PQ＝PR となるので，直角三角形 PQM と円 C_1 だけ考えれば条件が記述できることも見逃せない。