図チャレ 第66回(2007年3月)

半径1の円の周上に4点A，B，C，Dがこの順にある。弧AB，弧BC，弧CD，弧DAの長さをそれぞれ $\dfrac{1}{2}\pi$，$\dfrac{1}{2}\pi$，$\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{1}{3}\pi$ とする。ただし，πは円周率である。このとき，次の問いに答えよ。

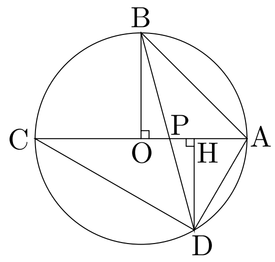
(1) 線分ABの長さを求めよ。

(2) 直線ACと直線BDの交点をPとするとき，∠APBの大きさを求めよ。

(3) 線分APの長さを求めよ。

出典：2007年 新潟大学

解答



(1) 円の中心をOとすると，仮定より

$$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \frac{\pi}{2}$$

円周角の性質より

$$\angle\mathrm{BAC} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{BOC} = \frac{\pi}{4}$$

よって，△OABは∠AOBを直角とする直角二等辺三角形となるから，

$$\mathrm{AB} = \sqrt{2}\,\mathrm{OA} = \sqrt{2} \quad \text{(答)}$$

(2) ACは円の直径となるから

$$\angle\mathrm{ADC} = \frac{\pi}{2}$$

$$\angle\mathrm{ACD} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{AOD} = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore\ \angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{ACD} = \frac{\pi}{6}$$

△ABPの内角の大きさの総和はπであるから

$$\angle\mathrm{APB} = \pi - \angle\mathrm{ABP} - \angle\mathrm{BAP} = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{12}\pi \quad \text{(答)}$$

(3) 点Dから線分ACにおろした垂線の足をHとすると

$$\triangle\mathrm{POB} \backsim \triangle\mathrm{PHD}$$

であるから，

$$\mathrm{OP}:\mathrm{HP} = \mathrm{OB}:\mathrm{HD} = 1:\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left(\mathrm{HD} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{AC}\right)$$

$\mathrm{OH} = \mathrm{OA} - \mathrm{AH} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ であるから，

$$\mathrm{HP} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,(2-\sqrt{3}\,)}{2\,(2+\sqrt{3}\,)(2-\sqrt{3}\,)} = \frac{2\sqrt{3}-3}{2}$$

$$\therefore\ \ \mathrm{AP} = \mathrm{AH} + \mathrm{HP} = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}-3}{2} = \sqrt{3}-1 \quad \text{(答)}$$

(注) 上の解答は初等幾何で解いたが，試験場では正弦定理と加法定理で解く方が思いつきやすいだろうか。

$\triangle\mathrm{ABP}$ において，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{AP}}{\sin\dfrac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sin\dfrac{7}{12}\pi} \qquad \therefore\ \ \mathrm{AP} = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\dfrac{7}{12}\pi}$$

$\dfrac{7}{12}\pi = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3}$ であるから，加法定理より

$$\sin\frac{7}{12}\pi = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \ \mathrm{AP} = \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}-1 \quad \text{(答)}$$