図チャレ 第67回(2007年4月)

n を自然数とする。平面上の $2n$ 個の点を 2 個ずつ組にして n 個の組を作り，組となった 2 点を両端とする n 本の線分を作る。このとき，どのような配置の $2n$ 個の点に対しても，n 本の線分が互いに交わらないような n 個の組を作ることができることを示しなさい。

出典：2007 年 名古屋大学

解答

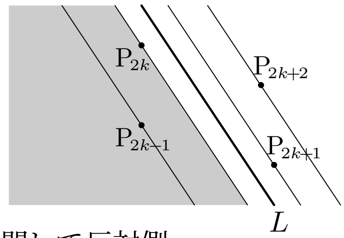
n についての数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のときは，2 点のみであるから成立する。

(ii) どのような配置の(相異なる) $2k$ 個の点に対しても，適当に k 個の組に分けて 2 個ずつ結んだ線分が互いに共有点を持たないとする。

$2(k+1)$ 個の点に対して，そのうちの 2 点を結ぶすべての直線は高々${}_{2(k+1)}\mathrm{C}_2$ 個(有限個)であるから，そのいずれにも平行でない直線 l が存在する。相異なる $2(k+1)$ 個の各点から l に平行な $2(k+1)$本の直線を引くと，l の定め方からこの $2(k+1)$本の直線はどの 2 つも共有点を持たない。

この相異なる $2(k+1)$本の直線を端から順に l_1，l_2，$\cdots$，$l_{2(k+1)}$とし，与えられた点で l_j 上にあるものを P_j $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ 2k+2)$とする。$l_{2k}$ と l_{2k+1} の間にどちらの直線とも共有点を持たない平行線 L を引くことができて，



$$\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \cdots,\ \mathrm{P}_{2k} \text{ と } \mathrm{P}_{2k+1},\ \mathrm{P}_{2k+2} \text{ は } L \text{ に関して反対側}$$

にあるから，線分 $\mathrm{P}_{2k+1}\mathrm{P}_{2k+2}$ は P_1，P_2，$\cdots$，P_{2k} のどの 2 点を結ぶ線分とも共有点を持たない。

帰納法の仮定より，$2k$ 個の点 P_1，P_2，$\cdots$，P_{2k} の番号を適当に付け替えると，k 本の線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$，$\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$，$\cdots$，$\mathrm{P}_{2k-1}\mathrm{P}_{2k}$ は互いに共有点を持たないから，$k+1$ 本の線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$，$\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$，$\cdots$，$\mathrm{P}_{2k-1}\mathrm{P}_{2k}$，$\mathrm{P}_{2k+1}\mathrm{P}_{2k+2}$ は互いに共有点を持たない。

(i), (ii)より，平面上の $2n$ 個の点を 2 個ずつ組にして，組となった 2 点を両端とする n 本の線分が互いに共有点を持たないようにできる。 (証明おわり)

(注)

1° 「交わらない」というのは，「共有点を持たない」の意味だと思われる。名古屋大学では，過去にも「接する」を「交わる」と表現した出題がある。

2° 数学的帰納法を用いたのは論理的構造を見やすくするためのものであり，本質的なことではない。たとえば，次のように論じることもできる。

与えられた $2n$ 個の点 P_1，P_2，$\cdots$，P_{2n} の 2 点を結んでできる直線は ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ 本で有限であるから，そのいずれの直線にも垂直でない直線 ℓ が存在する。

点 P_k から直線 ℓ におろした垂線の足を $\mathrm{Q}_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n)$ とする。任意に Q_i，$\mathrm{Q}_j\ (i \neq j)$ をとると，$\mathrm{P}_i\mathrm{P}_j$ は ℓ に垂直でないから，$\mathrm{Q}_i \neq \mathrm{Q}_j$ である。Q_1，Q_2，$\cdots$，Q_{2n} を ℓ 上で並んでいる順に $\mathrm{Q}_{i(1)}$，$\mathrm{Q}_{i(2)}$，$\cdots$，$\mathrm{Q}_{i(2n)}$ とするとき，n 本の線分 $\mathrm{Q}_{i(1)}\mathrm{Q}_{i(2)}$，$\mathrm{Q}_{i(3)}\mathrm{Q}_{i(4)}$，$\cdots$，$\mathrm{Q}_{i(2n-1)}\mathrm{Q}_{i(2n)}$ は互いに共有点をもたないから，n 本の線分 $\mathrm{P}_{i(1)}\mathrm{P}_{i(2)}$，$\mathrm{P}_{i(3)}\mathrm{P}_{i(4)}$，$\cdots$，$\mathrm{P}_{i(2n-1)}\mathrm{P}_{i(2n)}$ は互いに共有点をもたない。

(証明おわり)