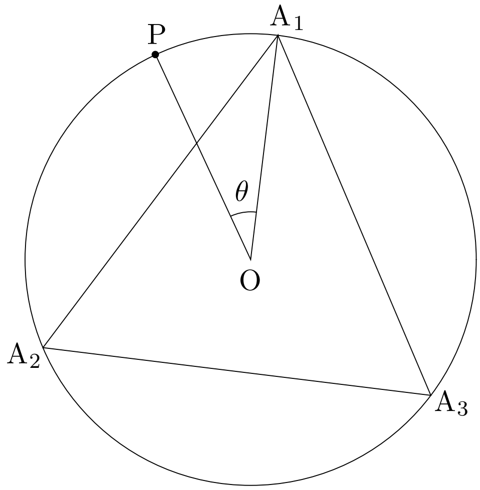
図チャレ 第68回 (2007年5月)

中心 O, 半径 1 の円に正三角形 $A_1A_2A_3$ が図のように内接しているとする。O を中心として点 A_1 を角 θ だけ回転移動した位置にある点を P とする。このとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{3}|\overrightarrow{A_iP}|^2$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}|\overrightarrow{A_iP}|^4$ は θ のとり方によらないことを示し，それぞれの値を求めよ。



出典：2007 年 広島市立大学 情報科学部

解答

座標平面上で

$$\mathrm{O}(0,\ 0),\ \mathrm{A}_1(1,\ 0),\ \mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta),$$
$$\mathrm{A}_2\left(\cos\frac{2}{3}\pi,\ \sin\frac{2}{3}\pi\right),\ \ \mathrm{A}_3\left(\cos\frac{4}{3}\pi,\ \sin\frac{4}{3}\pi\right)$$

として，一般性を失わない。このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{P}} = (\cos\theta - 1,\ \sin\theta),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{P}} = \left(\cos\theta + \frac{1}{2},\ \sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{P}} = \left(\cos\theta + \frac{1}{2},\ \sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

であるから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{P}}|^2 = (\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta = 2 - 2\cos\theta$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{P}}|^2 = \left(\cos\theta + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2 + \cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{A_3P}}\right|^2 = 2 + \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$$

よって，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\left|\overrightarrow{\mathrm{A_iP}}\right|^2 &= (2 - 2\cos\theta) + (2 + \cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta) + (2 + \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta)\\ &= 6 \ (\text{一定})\end{aligned}$$

次に，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\left|\overrightarrow{\mathrm{A_iP}}\right|^4 &= (2 - 2\cos\theta)^2 + (2 + \cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta)^2 + (2 + \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta)^2\\ &= (2 - 2\cos\theta)^2 + 2\left\{(2 + \cos\theta)^2 + 3\sin^2\theta\right\}\\ &= (4 - 8\cos\theta + 4\cos^2\theta) + 2(4 + 4\cos\theta + \cos^2\theta) + 6\sin^2\theta\\ &= 12 + 6(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\\ &= 18 \ (\text{一定})\end{aligned}$$

別解

P は劣弧 $\mathrm{A_1A_2}$ 上にあるとして示せば十分である。
正弦定理より，正三角形 $\mathrm{A_1A_2A_3}$ の各辺の長さは $\sqrt{3}$ であり，円周角の性質より

$$\angle \mathrm{A_3PA_1} = \angle \mathrm{A_3PA_2} = 60^\circ$$

である。

$\mathrm{A_1P} = x$，$\mathrm{A_2P} = y$，$\mathrm{A_3P} = z$ とおくと，$\triangle \mathrm{A_1A_3P}$ において余弦定理より

$$(\sqrt{3}\,)^2 = x^2 + z^2 - 2xz\cos 60^\circ$$

$$\therefore\ x^2 - xz + z^2 = 3 \qquad \cdots\cdots ①$$

$\triangle \mathrm{A_2A_3P}$ においても同様に

$$y^2 - yz + z^2 = 3 \qquad \cdots\cdots ②$$

$\triangle \mathrm{A_1A_2P}$ において余弦定理より

$$(\sqrt{3}\,)^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 120^\circ$$

$$\therefore\ x^2 + xy + y^2 = 3 \qquad \cdots\cdots ③$$

① − ② より

$$x^2 - y^2 - z(x - y) = 0 \qquad \therefore\ (x - y)(x + y - z) = 0$$

$x = y$ のとき，$\theta = 60^\circ$，$x = y = 1$，$z = 2$ となるから，いずれの場合も

$$x + y - z = 0 \qquad \cdots\cdots ④$$

③, ④より

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (x + y)^2 = 2(x^2 + xy + y^2) = 6 \ (\text{一定})$$

$$\begin{aligned}x^4 + y^4 + z^4 &= x^4 + y^4 + (x + y)^4\\ &= 2(x^4 + y^4 + 2x^3y + 2xy^3 + 3x^2y^2)\\ &= 2\left\{(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + 2xy(x^2 + y^2) + 3x^2y^2\right\}\\ &= 2\left\{(x^2 + y^2)^2 + 2xy(x^2 + y^2) + x^2y^2\right\}\\ &= 2(x^2 + y^2 + xy)^2\\ &= 2 \times 3^2 = 18 \ (\text{一定})\end{aligned}$$