図チャレ 第70回(2007年7月)

　四面体ABCDの辺AB上に点E，辺BCの延長上に点F，辺CDの延長上に点G，辺DA上に点Hをとる。ただし，4点E，F，G，Hはいずれも頂点とは異なるものとする。$\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CG}}{\mathrm{GD}}\cdot\dfrac{\mathrm{DH}}{\mathrm{HA}}=1$ ならば，4点E，F，G，Hは同一平面上にあることを示せ。

解答

　直線EFと辺ACの交点をP，直線GHと辺ACの交点をQとする。
平面ABC上において，△ABCにメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\times\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PA}}=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

平面ACD上において，△ACDにメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}\times\frac{\mathrm{CG}}{\mathrm{GD}}\cdot\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{HA}}=1 \qquad \cdots\cdots ②$$

仮定より

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{\mathrm{CG}}{\mathrm{GD}}\cdot\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{HA}}=1$$

であるから，①，②より

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{CP}}\times\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=1 \qquad \therefore\ \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{CP}}=\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{CQ}}$$

P，Qはともに辺AC上の点であるからP＝Qとなり，2直線EF，GHは点Pで交わるから，4点E，F，G，Hは同一平面上にある。　(証明おわり)