図チャレ 第71回(2007年8月)

正方形の各辺(両端を除く)と2点で交わる任意の円は，正方形の外接円の内部(および周)に含まれるか。成り立つならば証明し，成り立たないならば反例を挙げよ。

解答

座標平面上において O(0, 0), A(1, 0), B(1, 1), C(0, 1) とし，正方形 OABC 内の点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円が正方形 OABC の各辺(両端を除く)と2点で交わるための条件をまず求める。対称性より

$$0 \leqq a \leqq \frac{1}{2},\quad 0 \leqq b \leqq \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

の範囲で考えれば十分である。このとき，

$$a \leqq 1-a,\quad b \leqq 1-b$$

であるから，各辺を含む直線と $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円が異なる2点で交わるための条件は

$$r > 1-a \text{ かつ } r > 1-b \qquad \cdots\cdots ②$$

①のとき，4頂点 O, A, B, C のうち点 $(a,\ b)$ から最も近いのは原点 O であるから，4点 O, A, B, C がすべて円外にあるのは

$$r < \sqrt{a^2+b^2} \qquad \cdots\cdots ③$$

のときである。したがって，①のもとで題意の条件を満たすのは，②かつ③を満たす正の実数 r が存在することであり，それは

$$a^2+b^2 > (1-a)^2 \text{ かつ } a^2+b^2 > (1-b)^2 \qquad \cdots\cdots ④$$

が成り立つことと同値である。

①かつ④を満たす点 $(a,\ b)$ として $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{7}{16}\right)$ を選び，

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}} - t \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ は正方形 OABC の外接円の半径}\right)$$

とおいて，$t\,(>0)$ が②，③および

$$\frac{7}{16} - r < \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ すなわち } r > \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{16}$$

を満たすように定められるかを考える。

$r = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - t$ かつ $t > 0$ かつ $r > \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{16}$ より r を消去すると

$$0 < t < \frac{1}{16} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

である。$1-a = \dfrac{1}{2} < 1-b = \dfrac{9}{16}$ を考えて，②より

$$r-(1-b) = \frac{1}{\sqrt{2}} - t - \frac{9}{16} > 0$$

$$\therefore\ t < \frac{8\sqrt{2}-9}{16} \qquad \cdots\cdots ⑥$$

③より

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-t\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{16}\right)^2 = \frac{113}{16^2}$$

$$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{113}}{16} < t < \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{113}}{16} \qquad \cdots\cdots ⑦$$

以下，連立不等式 {⑤, ⑥, ⑦} を解く。まず,

$$\frac{8\sqrt{2}-9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{4\sqrt{2}-5}{8} = \frac{\sqrt{32}-\sqrt{25}}{8} > 0$$

より

⑤かつ⑥ $\iff$ ⑤

明らかに $\dfrac{1}{16} < \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{113}}{16}$ であり，$\left(\dfrac{21}{2}\right)^2 = \dfrac{441}{4} < \dfrac{452}{4} = 113$ を用いると

$$\begin{aligned}\frac{1}{16} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{113}}{16}\right) &= \frac{1+\sqrt{113}-8\sqrt{2}}{16} \\ &> \frac{1}{16}\left(1+\frac{21}{2}-8\sqrt{2}\right) \\ &= \frac{1}{16}\cdot\frac{23-16\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{529}-\sqrt{512}}{32} > 0\end{aligned}$$

より $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{113}}{16} < \dfrac{1}{16}$ が示され,

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{113}}{16} < t < \dfrac{1}{16}$ を満たす実数 t が存在する

ことがわかる。

したがって，座標平面上において

4 点 $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(0,\ 1)$ を頂点とする正方形に対して,

中心$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{16}\right)$, 半径 $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - t$ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{113}}{16} < t < \dfrac{1}{16}\right)$の円

を描けば，この円は正方形の各辺(両端を除く)と 2 点で交わり,

外接円の外部の点を通る

ことが反例となって,

命題は不成立　(答)

である。