図チャレ 第72回(2007年9月)

四角形ABCDの内部に，次の2条件を満たす点Oがある。

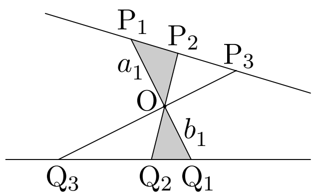
(i) Oを通る任意の直線は，四角形ABCD(の周)と2点のみを共有する。

(ii) Oを通る任意の直線は，四角形ABCDの面積を2等分する。

このとき，四角形ABCDはどのような四角形であるか。

解答

辺AB上に任意の3点P_1，P_2，P_3をとることができて，OP_1，OP_2，OP_3の延長と四角形ABCDの周との交点をそれぞれQ_1，Q_2，Q_3とする。P_1，P_2，P_3を十分近くにとることにより，3点Q_1，Q_2，Q_3は(四角形ABCDの)同じ辺上にあるとしてよい。



$\overline{OP_k}=a_k$，$\overline{OQ_k}=b_k$ $(k=1,\ 2,\ 3)$とおく。

条件(ii)より$\triangle OP_1P_2$と$\triangle OQ_1Q_2$の面積は等しく，

$$\angle P_1OP_2=\angle Q_1OQ_2 \quad (\text{対頂角})$$

であるから，面積公式より

$$a_1a_2=b_1b_2$$

$$\therefore\ \frac{a_1}{b_1}=\frac{b_2}{a_2} \qquad \cdots\cdots ①$$

同様に考えて，$a_1a_3=b_1b_3$および$a_2a_3=b_2b_3$より

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{b_3}{a_3} \qquad \cdots\cdots ②$$

$$\frac{a_2}{b_2}=\frac{b_3}{a_3} \qquad \cdots\cdots ③$$

②かつ③より$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$であり，これと①より

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{b_1}{a_1}\ \text{かつ}\ \frac{a_2}{b_2}=\frac{b_2}{a_2}$$

$$a_1{}^2=b_1{}^2\ \text{かつ}\ a_2{}^2=b_2{}^2 \qquad \therefore\ a_1=b_1\ \text{かつ}\ a_2=b_2$$

よって，OはP_1Q_1およびP_2Q_2の中点であるから，

四角形$P_1P_2Q_1Q_2$は平行四辺形

である。P_1，P_2は辺AB上にとったから，$P_1P_2 /\!/ Q_1Q_2$よりQ_1，Q_2は辺CD上にあり，

$$AB /\!/ CD$$

である。

3点P_1, P_2, P_3を辺AD上にとって議論を始めるとAD∥BCが示されることになるから，

四角形ABCDは平行四辺形　(答)

である。逆に，平行四辺形ならば，対角線の交点をOにとれば，(i), (ii)を満たす。