図チャレ 第74回(2007年11月)

AB＋CD＝BC＋ADを満たす凸四角形ABCDについて考える。

(1) ABを$a:b$に内分する点をE，BCを$b:c$に内分する点をF，CDを$c:d$に内分する点をG，DAを$d:a$に内分する点をHとする。4点E，F，G，Hを通る円が四角形ABCDに内接しない例を挙げよ。

(2) AB＋CD＝BC＋ADを満たす凸四角形ABCDは，ある円に外接することを証明せよ。

解答

(1) 例えば，一辺の長さ3の正方形で$a=c=1$，$b=d=2$のとき。

(2) (i) 四角形ABCDが平行四辺形のとき，AB＝CD，BC＝ADとなるから，条件AB＋CD＝BC＋ADよりひし形となる。ひし形の対角線の交点から各辺におろした垂線の長さは等しいから，対角線の交点を中心として各辺に接する円が描ける。

(ii) 四角形ABCDが平行四辺形でないとき

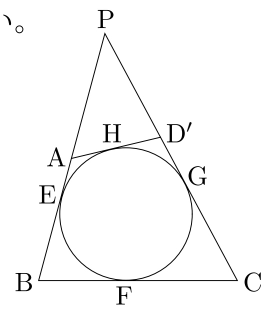
少なくとも1組の対辺が平行でないから，AB $\nparallel$ CDとしてよい。

$$\angle B+\angle C\neq 180^\circ \text{ かつ } \angle D+\angle A\neq 180^\circ$$

であるが，ともに180° より大きいと四角形ABCDの内角の総和が360° を超えてしまうから，

$$\angle B+\angle C<180^\circ$$

として一般性を失わない。このとき，直線ABと直線CDはA，Dの側の延長上で交わり，その交点をPとする。



△PBCには内接円がただ1つ存在するから，辺PB，BC，CPとの接点をそれぞれE，F，Gとし，BE＝BF＝b，CF＝CG＝cとおく。

$$\begin{aligned}(\mathrm{AB}-\mathrm{EB})+(\mathrm{CD}-\mathrm{CG})&=\mathrm{AB}+\mathrm{CD}-b-c\\&=\mathrm{AB}+\mathrm{CD}-\mathrm{BC}=\mathrm{AD}>0\end{aligned}$$

よりAB＞EBまたはCD＞CGであるが，

$$\mathrm{AB}>\mathrm{EB}$$

の場合だけ示せば十分である。このとき，Aから円に引いた接線の接点のうちEでない方をHとし，直線AHと直線PCの交点をD′とすると，

$$\mathrm{AB}+\mathrm{CD'}=\mathrm{BC}+\mathrm{AD'}$$

が成り立つから，条件式AB＋CD＝BC＋ADと辺々差をとると

$$\mathrm{CD}-\mathrm{CD'}=\mathrm{AD}-\mathrm{AD'} \qquad \therefore\ \mathrm{DD'}=|\mathrm{AD}-\mathrm{AD'}|$$

三角不等式の等号成立条件より，3点A，D，D′は同一直線上にあり，D，D′はともに直線CP上にあるから，点Dと点D′は一致する。したがって，四角形ABCDは△PBCの内接円に外接する。 (証明おわり)