図チャレ 第75回(2007年12月)

正方形ABCDの辺AB上に点Pがあり，Pを中心として辺CDに接する円と辺AD, BCとの交点をそれぞれQ，Rとする。ただし，P＝AのときはQ＝D，R＝Bとし，P＝BのときはQ＝A，R＝Cとする。

点Pが辺AB上を動くとき，$\theta=\angle\mathrm{QPR}$のとり得る値の範囲を求めよ。

解答

座標平面上でA(0, 0), B(1, 0), C(1, 1), D(0, 1)としても，一般性を損なうことなく$\theta=\angle\mathrm{QPR}$のとり得る値の範囲を求めることができる。

$\mathrm{P}(x,\ 0)$ $(0\leqq x\leqq 1)$とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(-x,\ \sqrt{1-x^2}\,)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(1-x,\ \sqrt{1-(1-x)^2}\,)=(1-x,\ \sqrt{2x-x^2}\,)$$

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|=1$より

$$\begin{aligned}\cos\theta=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}&=-x(1-x)+\sqrt{1-x^2}\sqrt{2x-x^2}\\&=x^2-x+\sqrt{x^4-2x^3-x^2+2x}\end{aligned}$$

この式を$f(x)$とおくと，$0<x<1$において

$$\begin{aligned}f'(x)&=2x-1+\frac{4x^3-6x^2-2x+2}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{2x-x^2}}\\&=2x-1+\frac{(2x-1)(x^2-x-1)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{2x-x^2}}\\&=\frac{(2x-1)\left\{(1-x^2)(2x-x^2)-(x^2-x-1)^2\right\}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{2x-x^2}\,(\sqrt{1-x^2}\sqrt{2x-x^2}-x^2+x+1)}\\&=\frac{-(2x-1)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{2x-x^2}\,(\sqrt{1-x^2}\sqrt{2x-x^2}-x^2+x+1)}\end{aligned}$$

$0<x<1$でつねに$-x^2+x+1=-x(x-1)+1>0$であるから，

$$f'(x)\text{は}-(2x-1)\text{と同符号}$$

であり，

$$f(x)\text{は}x=\frac{1}{2}\text{で極大かつ最大}$$

である。$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$，$f(0)=f(1)=0$より，$f(x)$のとり得る値の範囲は

$$0\leqq f(x)\leqq\frac{1}{2}$$

であり，$0\leqq\theta\leqq\pi$において$\cos\theta$は単調減少であるから，$\theta=\angle\mathrm{QPR}$のとり得る値の範囲は

$$\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\quad(\text{答})$$

である。