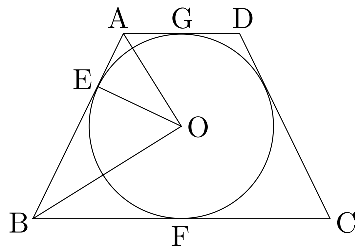
図チャレ 第76回 (2008年1月)

楕円に外接する等脚台形の上底と下底(平行な2辺)が長軸に平行であるとき，上底と下底の長さの積は長軸の長さの平方に等しいことを示せ。

解答

短軸方向にのみ図形全体を拡大しても，等脚台形の上底と下底，および楕円の長軸の長さは変わらないから，円の場合で題意を示せば十分である。



Oを中心とする円が等脚台形ABCDに内接しているものとし，AD∥BCのとき，辺AB, BC, DAと円との接点をそれぞれE, F, Gとする。

円外の点からひいた接線の(接点までの)長さは等しいから

$$\mathrm{AE}=\mathrm{AG},\ \ \mathrm{BE}=\mathrm{BF} \qquad \cdots\cdots ①$$

である。

OAは∠DABの二等分線，OBは∠ABCの二等分線であり，平行線の同側内角の和が180°であるから

$$\angle\mathrm{OAB}+\angle\mathrm{OBA}=90^\circ$$

となって

$$\triangle\mathrm{AEO} \backsim \triangle\mathrm{OEB}$$

が成り立つから，

$$\mathrm{AE}:\mathrm{EO}=\mathrm{OE}:\mathrm{EB} \qquad \therefore\ \ \mathrm{AE}\cdot\mathrm{BE}=\mathrm{OE}^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

①, ②より

$$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}=(2\,\mathrm{AE})(2\,\mathrm{BE})=(2\,\mathrm{OE})^2=(\text{直径})^2$$

(証明おわり)

数式処理による解法

xy 平面上において，楕円の方程式を

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a,\ b\text{は正の定数})$$

とし，等脚台形の上底と下底が直線 $y=\pm b$ 上にあるとすると，他の2辺がそれぞれ点

$$\bigl(a\cos\theta,\ b\sin\theta\bigr),\quad \bigl(a\cos(\pi-\theta),\ b\sin(\pi-\theta)\bigr)\quad \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

において接するものとして一般性を失わない。

点 $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ における楕円の接線の方程式は

$$\frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1$$

であり，$y=b$ とおくと

$$\frac{\cos\theta}{a}x = 1 - \sin\theta \qquad \therefore\ x = \frac{a}{\cos\theta}(1 - \sin\theta)$$

$y = -b$ とおくと

$$\frac{\cos\theta}{a}x = 1 + \sin\theta \qquad \therefore\ x = \frac{a}{\cos\theta}(1 + \sin\theta)$$

対称性を考えて，

$$\begin{aligned}(\text{上底の長さ})\times(\text{下底の長さ}) &= \frac{2a}{\cos\theta}(1 - \sin\theta) \times \frac{2a}{\cos\theta}(1 + \sin\theta) \\ &= (2a)^2 \times \frac{1 - \sin^2\theta}{\cos^2\theta} \\ &= (2a)^2\end{aligned}$$

(証明おわり)

(注) 上底と下底が短軸に平行であれば，上底と下底の長さの積は，短軸の長さの平方に等しくなる。