図チャレ 第78回(2008年3月)

半径1の円Oの円周上に4点A, B, C, Dを，線分ACと線分BDが円Oの内部の点Eで交わるようにとる．△ABEと△CDEがそれぞれ，辺の長さa, bの正三角形であるとき，次の各問に答えよ．

(1) 線分BCの長さを求めよ．

(2) $\dfrac{b}{a} = t$とするとき，aをtで表せ．

(3) $a + b$が最大となるときのtの値とそのときの$a + b$の値をそれぞれ求めよ．

(4) △ABEと△CDEの面積の和の最小値とそのときのtの値を求めよ．

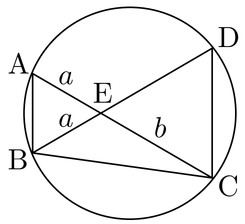
出典：2008年 同志社大学 理系

解答

(1) △ABCにおいて，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin 60^\circ} = 2 \times 1 \qquad \therefore\ \mathrm{BC} = \sqrt{3} \quad (答)$$

(2) △BCEにおいて，余弦定理より



$$3 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120^\circ$$

$$\therefore\ a^2 + ab + b^2 = 3$$

$b = at$を代入して

$$a^2 + a^2t + a^2t^2 = 3$$

$$a^2(t^2 + t + 1) = 3$$

$t^2 + t + 1 = \left(t + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$を考えて

$$a = \sqrt{\frac{3}{t^2 + t + 1}} \quad (答)$$

(注) △ABCに余弦定理を適用してもよい。

(3) (2)を用いると

$$a + b = a(1 + t) = \sqrt{\frac{3(t+1)^2}{t^2 + t + 1}}$$

$$= \sqrt{3\left(1 + \frac{t}{t^2 + t + 1}\right)}$$

$$= \sqrt{3\left(1 + \frac{1}{t + 1 + \frac{1}{t}}\right)}$$

$t>0$であるから，相加・相乗平均の不等式より

$$t+\frac{1}{t} \geqq 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=2$$

$$\therefore\ \ a+b \leqq \sqrt{3\left(1+\frac{1}{2+1}\right)}=2$$

ここで，不等式の等号は $t=\dfrac{1}{t}>0$ すなわち $t=1$ のとき成り立つから，

$t=1$ のとき $a+b$ の最大値 2　(答)

(4)　△ABE と △CDE の面積和 S は

$$S=\frac{1}{2}a^2\sin 60^\circ+\frac{1}{2}b^2\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)$$

(2)を用いると

$$a^2+b^2=(1+t^2)a^2=\frac{3(t^2+1)}{t^2+t+1}=3\left(1-\frac{1}{t+1+\dfrac{1}{t}}\right)$$

と表され，(3)と同様にして $t=1$ のとき $t+\dfrac{1}{t}$ は最小値 2 をとるから，S は

$t=1$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 3\left(1-\dfrac{1}{2+1}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(答)

をとる。