図チャレ 第79回 (2008年4月)

実数 a，t に対し，方程式

$$x^2+y^2+2tx-4ax+2ty+4\,|a-3\,|+28=0 \qquad (\ast)$$

を考える。次の各問いに答えよ。

(1) t がどのような実数であっても方程式($\ast$)が円を表すような a の範囲を求めよ。

(2) $a=6$ とする。このとき，方程式($\ast$)は t がどのような実数であっても円を表す。t がすべての実数を動くとき，方程式($\ast$)によって表される円の周が通過する領域を D とする。xy 平面を全体集合とするとき，D の補集合を図示せよ。

出典：2008 年 横浜国立大学 経済学部

解答

(1) ($\ast$)を平方完成すると

$$\begin{aligned}(x+t-2a)^2+(y+t)^2 &= (t-2a)^2+t^2-4|a-3|-28\\ &= 2t^2-4at+4a^2-4|a-3|-28\\ &= 2(t-a)^2+2a^2-4|a-3|-28\end{aligned}$$

となるから，

「t がどのような実数であっても($\ast$)が円を表す」
$\iff$ 任意の実数 t に対して，$2(t-a)^2+2a^2-4|a-3|-28>0$
$\iff$ $2a^2-4|a-3|-28>0$

である。

$a \geqq 3$ のとき

$$2a^2-4(a-3)-28=2(a^2-2a-8)=2(a+2)(a-4)>0$$

$$\therefore\ a>4$$

$a \leqq 3$ のとき

$$\begin{aligned}2a^2+4(a-3)-28 &= 2(a^2+2a-20)\\ &= 2\{(a+1)^2-21\}\\ &= 2(a+1+\sqrt{21}\,)(a+1-\sqrt{21}\,)>0\end{aligned}$$

$$\therefore\ a<-1-\sqrt{21}$$

以上より，求める a の範囲は

$a<-1-\sqrt{21}$ または $a>4$ (答)

(2)　$a=6$ のとき，$(*)$は

$$x^2+y^2+2tx-24x+2ty+40=0$$
$$2t(x+y)+x^2+y^2-24x+40=0$$

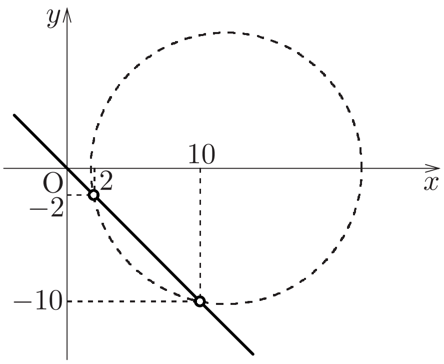
実数 t が存在しない条件を考えて，D の補集合は

$$x+y=0 \text{ かつ } x^2+y^2-24x+40\neq 0$$

$\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2-24x+40=0 \end{cases}$ を解くと

$$x^2+(-x)^2-24x+40=0$$
$$2(x^2-12x+20)=2(x-2)(x-10)=0$$
$$\therefore\ (x,\ y)=(2,\ -2),\ (10,\ -10)$$

となるから，D の補集合は次図のようになる。



(答)

(注)　$(*)$ は 2 点 $(2,\ -2)$，$(10,\ -10)$ を通る円を表すから，t がすべての実数を動くとき，その 2 点を通る円すべてを尽くすことさえ示すことができれば，結果は明らかである。図形的直感だけでそれを説明するのは難しいので，はじめから上のように数式処理で解く方が答案としては論じやすい。