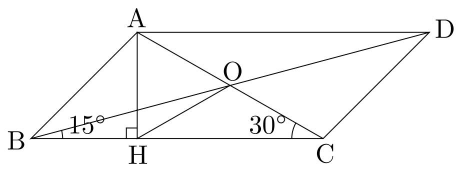
図チャレ 第80回(2008年5月)

　平行四辺形ABCDは$\angle\mathrm{ACB}=30^\circ$，$\angle\mathrm{CBD}=15^\circ$を満たし，対角線AC，BDの交点をO，頂点Aから辺BCに下ろした垂線の足をHとする。

(1) $\triangle\mathrm{OAH}$は正三角形であることを示せ。

(2) $\angle\mathrm{ABC}$を求めよ。

解答



(1) $\angle\mathrm{ACH}=30^\circ$，$\angle\mathrm{AHC}=90^\circ$より

$$\angle\mathrm{CAH}=60^\circ \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\therefore\ \mathrm{AC}=2\mathrm{AH}$$

　平行四辺形の性質より

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}$$

　であるから，

$$\mathrm{AH}=\frac{1}{2}\mathrm{AC}=\mathrm{OA} \qquad \cdots\cdots ②$$

　①，②より，$\triangle\mathrm{OAH}$は頂角60°の二等辺三角形であるから，正三角形である。

(証明おわり)

(2) (1)の考察より

$$\angle\mathrm{OHC}=\angle\mathrm{AHC}-\angle\mathrm{AHO}=90^\circ-60^\circ=30^\circ$$

$$\angle\mathrm{BOH}=\angle\mathrm{OHC}-\angle\mathrm{OBC}=30^\circ-15^\circ=15^\circ$$

　となるから，

$$\mathrm{OH}=\mathrm{BH}$$

　である。$\triangle\mathrm{OAH}$は正三角形であるから

$$\mathrm{AH}=\mathrm{OH}=\mathrm{BH}$$

　となり，$\triangle\mathrm{ABH}$は直角二等辺三角形であるから，

$$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ABH}=45^\circ \quad (答)$$